

Esame di Fisica Generale I (secondo modulo) [145033]
Laurea Triennale in Matematica, A. A. 2022-2023
12 Giugno 2023, Aula A105

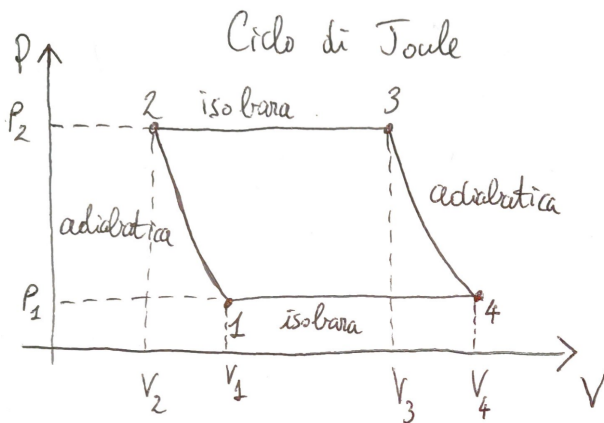
Tempo totale a disposizione: 3 ore

Totale punti: $(0 + 1 + 3 + 1 + 3 + 3) + (1 + 6) + (2 + 2 + 1 + 2 + 1) + (1 + 3 + 3) = 33$

Si indichi **chiaramente** il proprio nome e numero di matricola su **tutti** i fogli, e si numerino tutti i fogli in alto a destra. Si indichi inoltre chiaramente l'inizio della risoluzione di ogni esercizio e sotto-esercizio. In bocca al lupo!

Esercizio 1

Un gas ideale monoatomico, inizialmente in equilibrio a pressione e volume rispettivamente P_1 e V_1 , subisce il cosiddetto *ciclo di Joule* (mostrato in figura), costituito da due trasformazioni adiabatiche reversibili ($1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$) e due trasformazioni isobare reversibili ($2 \rightarrow 3$ e $4 \rightarrow 1$). Si denotino con α , β , e δ rispettivamente i rapporti di espansione $P_2/P_1 \equiv \alpha > 1$, $V_3/V_2 \equiv \beta > 1$, e $V_4/V_1 \equiv \delta > 1$.



- (a) Perché ho deciso di chiamare $V_4/V_1 = \delta$ e non $V_4/V_1 = \gamma$? ☹ [0 punti]
- (b) Dimostrare che $\beta = \delta$. [1 punto]
- (c) Dimostrare che l'efficienza del ciclo di Joule è $\eta = 1 - \alpha^{(1-\gamma)/\gamma}$. [3 punti]
- (d) Discutere il significato fisico del limite $\alpha \rightarrow \infty$, e perché in tale limite $\eta \rightarrow 1$. [1 punto]
- (e) Confrontare il rendimento con quello di un ciclo di Carnot operante fra le stesse temperature minima e massima del ciclo di Joule. [3 punti]

(f) Si consideri la seguente nuova variabile termodinamica \mathcal{A} (energia libera di Allegrì):

$$\mathcal{A} = U(TS)^3 - \frac{(PV)^5}{nRT} + \frac{H^8}{G^4} \exp\left(\frac{S}{S_0}\right),$$

con H l'entalpia, G l'energia libera di Gibbs, e S_0 un valore di riferimento arbitrario dell'entropia. Quali sono le unità di \mathcal{A} , e di quanto varia \mathcal{A} lungo un ciclo di Joule completo ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$)? [3 punti]

Esercizio 2

Si consideri un gas ideale, inizialmente in equilibrio a pressione e volume rispettivamente P_i e V_i , che compie una trasformazione termodinamica descritta dalla seguente funzione:

$$P(V) = \alpha \ln\left(\frac{V}{V_0}\right),$$

dove \ln indica il logaritmo naturale, α è una costante positiva, e V_0 è un volume di riferimento tale che $V > V_0$ lungo la trasformazione, di modo che l'argomento del logaritmo sia sempre > 1 . Il gas espande dal volume iniziale V_i a un volume finale $V_f = \beta V_i$, con $\beta > 1$.

- (a) Quali sono le unità di α ? E perché ho inserito V_0 nell'argomento del logaritmo? [1 punto]
- (b) Si calcolino la variazione di energia interna ΔU , il lavoro svolto dal gas W , e il calore assorbito dal gas Q durante la trasformazione. Si calcoli Q in due modi e si dimostri che i risultati coincidono: [6 punti]
 - Usando il primo principio nella forma $\Delta U = Q - W$

- Integrando la versione differenziale alternativa del primo principio che abbiamo visto in classe, ovvero:

$$\delta Q = n c_P dT - V dP,$$

Per semplificarvi la vita, vi indico i seguenti integrali indefiniti che possono tornarvi utili:

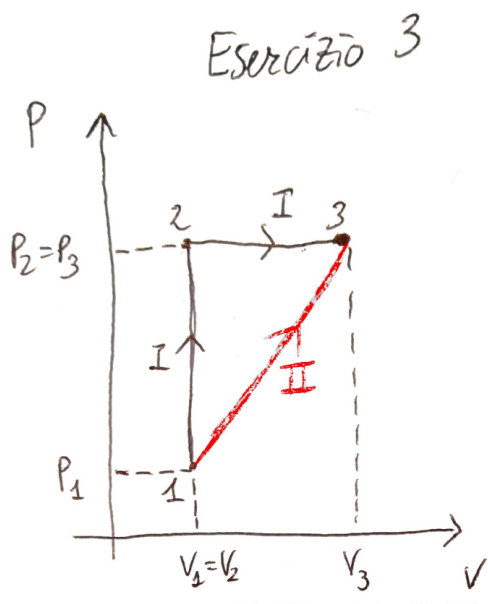
$$\int dx \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -x + x \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad \int dx \exp\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha \exp\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Esercizio 3

Si consideri un gas ideale che, nel piano P-V in Figura, è inizialmente in equilibrio nel punto 1 a pressione e volume rispettivamente P_1 e V_1 . Il gas poi compie trasformazioni che lo portano al punto 3 nei seguenti modi:

1. lungo il percorso "I" in nero ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$), ovvero una trasformazione isocora reversibile ($1 \rightarrow 2$) seguita da una trasformazione isobara reversibile ($2 \rightarrow 3$);
2. lungo il percorso "II" in rosso ($1 \rightarrow 3$), ovvero una trasformazione reversibile diretta da 1 a 3 descritta da una funzione lineare nel piano P-V.

Si denotino con α e β rispettivamente i rapporti di espansione $P_2/P_1 \equiv \alpha$ e $V_3/V_2 \equiv \beta$.



- a) Calcolare la variazione di entropia dell'ambiente ΔS_{amb} lungo il percorso I. **[2 punti]**
- b) Ripetere il conto per ΔS_{amb} sul percorso II e mostrare che il risultato non cambia. **[2 punti]**
- c) Discutere il significato fisico del confronto fra i due risultati precedenti. **[1 punto]**
- d) Si assuma che $P_1 = 1 \text{ bar}$, $V_1 = 1 \text{ m}^3$, $\alpha = 3$, e $\beta = 2$. Calcolare il lavoro W svolto dal gas lungo i percorsi I e II, e mostrare che il risultato è diverso nei due casi. C'era motivo di aspettarsi che $W_I \neq W_{II}$? **[2 punti]**
- e) È lecito pensare a $|W_{II} - W_I|$ come energia degradata, e quindi scriverla in termini di $T \Delta S_{\text{univ}}$, con T opportunamente scelta? Motivare in dettaglio la risposta. **[1 punto]**

Esercizio 4

Un gas ideale, isolato adiabaticamente e inizialmente in equilibrio a pressione e volume rispettivamente P_i e V_i , subisce un'espansione libera adiabatica espandendo fino a un volume $V_f = \alpha V_i$, con $\alpha > 1$.

- a) Calcolare la variazione di entropia del gas ΔS_{gas} , dell'ambiente ΔS_{amb} , e dell'Universo ΔS_{univ} , in seguito alla trasformazione. **[1 punto]**
- b) Si supponga ora che l'energia interna del gas non sia della forma standard $U = n c_V T + \text{const}$, ma $U = \beta T^4$ con β una costante positiva. Specificare le unità di β . Si ripeta poi il calcolo di ΔS_{gas} , ΔS_{amb} , e ΔS_{univ} . Nel fare il calcolo, si assuma che rimangono invariati rispetto al caso standard i risultati dell'esperimento di Joule, il primo principio della termodinamica, e l'equazione di stato del gas ($PV = nRT$). Confrontare il risultato con quello del caso precedente, e discuterne il significato fisico. **[3 punti]**
- c) Si supponga ora che l'equazione di stato del gas prenda la forma non standard $PV^2 = n\tilde{R}T$, con \tilde{R} una costante positiva. Specificare le unità di \tilde{R} . Si ripeta poi il calcolo di ΔS_{gas} , ΔS_{amb} , e ΔS_{univ} . Nel fare il calcolo, si assuma che rimangono invariati rispetto al caso standard l'energia interna del gas ($U = n c_V T + \text{const}$), i risultati dell'esperimento di Joule, e il primo principio della termodinamica. Confrontare il risultato con quelli dei due casi precedenti, e discuterne il significato fisico. **[3 punti]**

Fine dell'esame