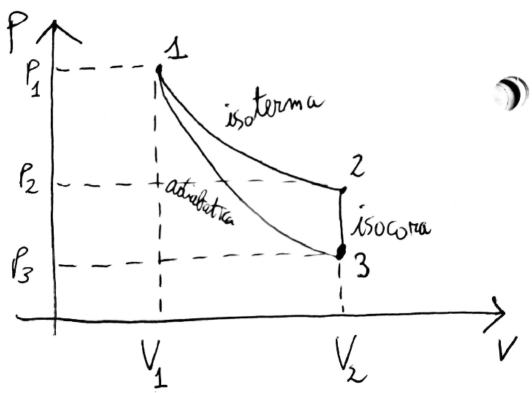
Esame di Fisica Generale I (secondo modulo) [145033]
Laurea Triennale in Matematica, A. A. 2022-2023
10 Luglio 2023, Aula A105

Tempo totale a disposizione: 3 ore
Totale punti: $(3+1+3+2+1)+(10\times 1)+(1+2+2+2+2+2+2)=33$
Si indichi **chiaramente** il proprio nome e numero di matricola su **tutti** i fogli, e si numerino tutti i fogli in alto a destra. Si indichi inoltre chiaramente l'inizio della risoluzione di ogni esercizio e sotto-esercizio. In bocca al lupo!

Esercizio 1

Un gas ideale monoatomico, inizialmente in equilibrio a pressione e volume P_1 e V_1, subisce il ciclo in figura, costituito da una trasformazione isoterma reversibile ($1\to 2$), una isocora reversibile ($2\to 3$), e una adiabatica reversibile ($3\to 1$). Si denoti con α il rapporto di espansione $V_2/V_1 = V_3/V_1 \equiv \alpha > 1$.



(a) Dimostrare che il rendimento del ciclo in questione è dato da: [**3 punti**]

$$\eta = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1-\alpha^{-\frac{2}{3}}}{\ln \alpha}\right),$$

dove ln denota il logaritmo naturale.

(b) Determinare il rendimento di un ciclo di Carnot operante fra le stesse temperature minima e massima del ciclo di cui al punto (a). Non è richiesto fare un confronto fra i due rendimenti in questione. [**1 punto**]

(c) Si supponga ora che la trasformazione isoterma quasistatica reversibile $1\to 2$ venga sostituita da una espansione libera adiabatica (**irreversibile**), che porta il sistema dallo stato 1 allo stesso stato 2 di prima di modo che le rimanenti trasformazioni $2\to 3$ e $3\to 1$ rimangano invariate. Calcolare quanto vale formalmente il rendimento del nuovo ciclo e spiegare il motivo per il quale che quest'ultimo non può essere considerato una macchina termica. [**3 punti**]

(d) Ora si consideri nuovamente il ciclo iniziale del punto (a), dove la trasformazione $1\to 2$ ritorna quindi a essere una isoterma quasistatica reversibile. Si supponga che la trasformazione isocora $2\to 3$ venga realizzata in maniera **irreversibile**. In particolare si pone il gas, a partire dalla pressione P_2 e volume V_2, *istantaneamente* in un ambiente alla stessa pressione P_3 del punto (a), ponendolo allo stesso tempo istantaneamente a contatto con un termostato alla stessa temperatura $T_3 = P_3V_3/nR$ raggiunta nel caso reversibile nel punto (a), e aspettando che venga ristabilito l'equilibrio termodinamico. Calcolare il rendimento di questo nuovo ciclo. [**2 punti**]

(e) Come cambia il risultato del punto (d) se non utilizza il termostato alla temperatura T_3? [**1 punto**]

Esercizio 2

10 inventori si presentano da un magnate affermando di aver progettato delle macchine termiche con caratteristiche elencate di sotto, e chiedendo (cospicui) finanziamenti per realizzare queste macchine. Di questo 10 inventori, 8 sono ciarlatani, 1 è un fesso, e 1 è legittimo. Per ognuno dei 10 casi di sotto, indicare a quali di queste 3 categorie appartenga l'inventore, e spiegare il perché. [**10×1 punto**]

(a) Una macchina che opera tra 2 sorgenti prelevando $Q_{\mathrm{IN}} = 30\,\mathrm{J}$ dalla sorgente calda, scaricando $|Q_{\mathrm{OUT}}| = 20\,\mathrm{J}$ sulla sorgente fredda, e producendo $W = 15\,\mathrm{J}$ di lavoro.

(b) Una macchina che preleva $Q_{\mathrm{IN}} = 30\,\mathrm{J}$ da una sorgente e li converte integralmente in $W = 30\,\mathrm{J}$ di lavoro.

(c) Una macchina con un'efficienza $\eta = 50\%$ che opera tra 2 sorgenti prelevando $Q_{\text{IN}} = 30\,\text{J}$ dalla sorgente calda, scaricando $|Q_{\text{OUT}}| = 20\,\text{J}$ sulla sorgente fredda.

(d) Una macchina con un'efficienza $\eta = 75\%$ che preleva $Q_{\text{IN}} = 30\,J$ da una sorgente a $T_1 = 400\,\text{K}$ e scarica su una sorgente a $T_2 = 200\,\text{K}$.

(e) Una macchina che preleva $Q_{\text{IN}} = 30\,J$ da una sorgente a $T_1 = 300\,\text{K}$ e scarica su una sorgente a $T_2 = 0\,\text{K}$.

(f) Una macchina che preleva $Q_1 = 400\,J$ da una sorgente a $T_1 = -73.15\,°\text{C}$, preleva $Q_2 = 300\,\text{J}$ da una sorgente a $T_2 = -173.15\,°\text{C}$, e scarica su una sorgente a $T_3 = 50\,\text{K}$, producendo $W = 500\,\text{J}$ di lavoro.

(g) Una macchina che opera tra due sorgenti a $T_1 = 200\,\text{K}$ e $T_2 = 100\,\text{K}$ con un'efficienza $\eta = 90\%$.

(h) Una macchina che preleva $Q_{\text{IN}} = 30\,\text{J}$ da una sorgente a $T_1 = 300\,\text{K}$ e scarica $|Q_{\text{OUT}}| = 40\,\text{J}$ su una sorgente a $T_2 = 100\,\text{K}$.

(i) Una macchina che preleva $Q_1 = 300\,\text{J}$ da una sorgente a $T_1 = -243.15\,°\text{C}$, preleva $Q_2 = 200\,\text{J}$ da una sorgente a $T_2 = 20\,\text{K}$, preleva $Q_3 = 100\,\text{J}$ da una sorgente a $T_3 = 10\,\text{K}$, e scarica $|Q_4| = 100\,\text{J}$ su una sorgente a $T_4 = -268.15\,°\text{C}$.

(j) Una macchina che opera tra due sorgenti a $T_1 = 200\,\text{K}$ e $T_2 = 100\,\text{K}$ con un'efficienza $\eta = 49\%$.

Esercizio 3

Si consideri un ipotetico gas con energia interna non-standard della forma $U(T) = \alpha T^3$ che obbedisce a un'equazione di stato della forma $PV = \beta T^3$, con α e β costanti positive. Si noti che vale sempre $\delta W = PdV$. (**NB/suggerimento**: **NON** usate c_V e c_P in quanto segue – fate finta che non esistano!)

a) Determinare le unità di α e β. [**1 punto**]

b) Il gas, inizialmente a temperatura, pressione, e volume rispettivamente T_i, P_i, e V_i, compie un'espansione isoterma fino a un volume $V_f = \epsilon V_i$, con $\epsilon > 1$. Calcolare il calore assorbito dal gas ed esprimerlo in funzione di β, T_i, ed ϵ. [**2 punti**]

c) Partendo dalle stesse coordinate T_i, P_i, e V_i di prima, il gas questa volta compie una trasformazione isocora che lo porta alla pressione finale $P_f = \epsilon P_i$, con $\epsilon > 1$. Calcolare il calore assorbito dal gas ed esprimerlo in funzione di α, T_i, ed ϵ. [**2 punti**]

d) Partendo dalle stesse coordinate T_i, P_i, e V_i di prima, il gas questa volta compie una trasformazione isobara che lo porta al volume finale $V_f = \epsilon V_i$, con $\epsilon > 1$. Calcolare il calore assorbito dal gas ed esprimerlo in funzione di α, β, T_i, ed ϵ. [**2 punti**]

e) Si dimostri che un gas di questo tipo che compie trasformazioni adiabatiche quasistatiche obbedisce le relazioni $TV^{\beta/(3\alpha)} =$ costante e $PV^{(\alpha+\beta)/\alpha} =$ costante. [**2 punti**]

f) Si supponga che il gas in questione compie un ciclo di Carnot, composto al solito da due adiabatiche reversibili e due isoterme reversibili, rispettivamente a temperature T_H e T_L, con $T_H > T_L$. Dimostrare che il rendimento del ciclo di Carnot per questo gas è $\eta = 1 - (T_L/T_H)^3$. Possono ovviamente tornarvi utili i risultati dei punti (b) ed (e), e se non siete riusciti a dimostrare quest'ultimo potete prendere per buone le relazioni che ho scritto senza ulteriore dimostrazione. [**2 punti**]

g) Infine si supponga che, sempre partendo dalle stesse coordinate T_i, P_i, e V_i di prima, il gas compie un'espansione libera adiabatica che lo porta al volume finale $V_f = \epsilon V_i$, con $\epsilon > 1$. Si calcoli la variazione di entropia del gas, dell'ambiente, e dell'Universo, assumendo che valgano gli stessi risultati standard per l'esperimento di Joule, e si esprimano queste tre quantità in funzione di α, β, T_i, ed ϵ. [**2 punti**]

Fine dell'esame