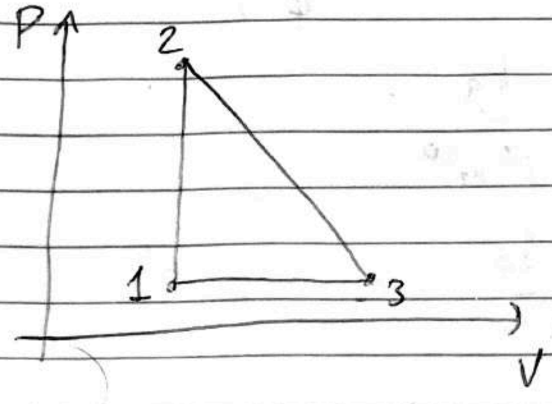
SOLUZIONI ESAME TERMODINAMICA GENNAIO 2024

1

1a)



$$\frac{P_2}{P_1} = 3 \qquad \frac{V_3}{V_2} = 2$$

$$PV = nRT \longrightarrow T = \frac{PV}{nR}$$

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} \Longrightarrow T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \frac{P_2 V_1}{nR} = \frac{P_2}{P_1} T_1 = 3T_1$$

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} = \frac{P_1 V_3}{nR} = \frac{V_3}{V_1} T_1 = 2T_1$$

$T_3 < T_2 \rightarrow$ gas si <u>raffredda</u>

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + W_{23}$$

$$\Delta U_{23} = n c_v (T_3 - T_2) = \frac{3}{2} nR(2T_1 - 3T_1) = -\frac{3}{2} nRT_1$$

$$W_{23} = \text{area trapezio} = \frac{(P_2 + P_1)(V_3 - V_1)}{2} =$$

$$= \frac{4P_1 V_1}{2} = 2P_1 V_1 = 2nRT_1$$

$$Q_{23} = -\frac{3}{2} nRT_1 + 2nRT_1 = \frac{1}{2} nRT_1$$

Quindi il gas <u>assorbe</u> calore. Il fatto controintuitivo che si raffredda è semplicemente perché poi fa più lavoro del calore che assorbe, a spese di ΔU!

1b) Calcoliamo $Q, \Delta U, W$ lungo tutti i rami

12

$Q_{12} = nc_v(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} nR(3T_1 - T_1) = \frac{3}{2} nR\,2T_1 = 3nRT_1 > 0 \Rightarrow Q_{in}$

$W_{12} = 0$

$\Delta U_{12} = 3nRT_1$

23 già fatto prima

$Q_{23} = \frac{1}{2} nRT_1$ $\quad W_{23} = 2nRT_1 \quad \Delta U_{23} = -\frac{3}{2} nRT_1$

$> 0 \Rightarrow Q_{in}$

31

$Q_{31} = nc_p(T_1 - T_3) = \frac{5}{2} nR(T_1 - 2T_1) = -\frac{5}{2} nRT_1 < 0 \Rightarrow Q_{out}$

$W_{31} = P_1(V_1 - V_3) = P_1(V_1 - 2V_1) = -P_1V_1 = -nRT_1$

$\Delta U_{31} = Q_{31} - W_{31} = -\frac{3}{2} nRT_1$

Controlliamo

$Q_{in} = Q_{12} + Q_{23} = 3nRT_1 + \frac{1}{2} nRT_1 = \frac{7}{2} nRT_1$

$|Q_{out}| = |Q_{31}| = \frac{5}{2} nRT_1$

$W_{tot} = W_{12} + W_{23} + W_{31} = 0 + 2nRT_1 - nRT_1 = nRT_1$

$W_{tot} = Q_{in} - |Q_{out}|$ ✓

$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = \frac{nRT_1}{\frac{7}{2} nRT_1} = \frac{2}{7}$ ✓

$\eta = 1 - \frac{|Q_{out}|}{Q_{in}} = 1 - \frac{\frac{5}{2} nRT_1}{\frac{7}{2} nRT_1} = 1 - \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ ✓

Quindi $\eta = \frac{2}{7}$

1c) $\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}}$ e $T_{min} = T_1$ $T_{max} = T_2$

$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{7} < \frac{2}{3}$!

1d) Tutte le Q con W cambiano segno. Quindi

13

$Q_{13} = \frac{5}{2} nRT_1 > 0 \to Q_{IN}$

$W_{13} = nRT_1$ $\Delta U_{13} = \frac{3}{2} nRT_1$

32

$Q_{32} = -\frac{1}{2} nRT_1 < 0 \to Q_{OUT}$

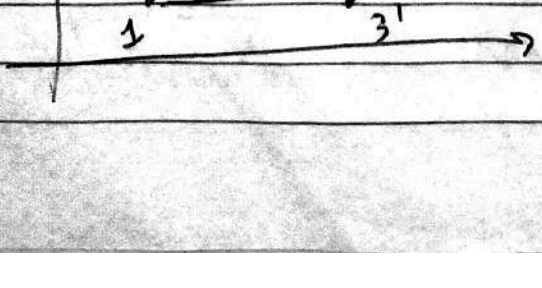
$W_{32} = -2nRT_1$ $\Delta U_{32} = \frac{3}{2} nRT_1$

21

$Q_{21} = -3nRT_1 < 0 \to Q_{OUT}$ $W_{21} = 0$ $\Delta U_{21} = -3nRT_1$

$$\omega = \frac{Q_{IN}}{|W|} = \frac{Q_{13}}{|W_{13}+W_{32}+W_{21}|} = \frac{\frac{5}{2} nRT_1}{|nRT_1 - 2nRT_1 + 0|} = \frac{\frac{5}{2} nRT_1}{nRT_1} = \frac{5}{2}$$

1e)



Grazie al termostato a T_3 abbiamo $3' = 3$

Ricalcoliamo $Q, \Delta U, W$. Per $1 \to 2$ e $3 \to 1$ rimangono uguali a prima

12

$Q_{12} = 3nRT_1 \to Q_{IN}$ $W_{12} = 0$ $\Delta U_{12} = 3nRT_1$

31

$Q_{31} = -\frac{5}{2} nRT_1 \to Q_{OUT}$ $W_{31} = -nRT_1$ $\Delta U_{31} = -\frac{3}{2} nRT_1$

23

$W_{23} = P_3(V_3 - V_2) = P_1(V_3 - V_1) = P_1(2V_1 - V_1) = P_1V_1 = nRT_1$

lavoro fatto globalmente sull'ambiente

(ricordiamo in precedenza $W_{23} = 2nRT_1$!)

$\Delta U_{23} =$ come prima $nc_v(T_3 - T_2) = \frac{3}{2} nR(2T_1 - 3T_1) =$

$= -\frac{3}{2} nRT_1$

$Q_{23} = \Delta U_{23} + W_{23} = -\frac{3}{2} nRT_1 + nRT_1 = -\frac{1}{2} nRT_1 < 0 \Rightarrow Q_{IN}$

(ricordiamo in precedenza $Q_{23} = \frac{1}{2} nRT_1$)

$W_{tot} = W_{12} + W_{23} + W_{31} = 0 - nRT_1 + nRT_1 = 0$!

Il sistema globalmente non fa lavoro

Infatti $Q_{IN} = Q_{12} = 3nRT_1$ $|Q_{OUT}| = |Q_{31} + Q_{23}| =$

$= \left| -\frac{5}{2} nRT_1 - \frac{1}{2} nRT_1 \right| = 3nRT_1 \Rightarrow Q_{IN} = |Q_{OUT}|$

tanto calore entra quanto esce $\to$ non è una macchina termica!

$\eta = \frac{W}{Q_{IN}} = 0$ $\eta = 1 - \frac{|Q_{OUT}|}{Q_{IN}} = 1 - 1 = 0$! $\eta = 0$ macchina inutile

1f) $\Delta S_{univ, 1\to 2\to 3\to 1} = \Delta S_{univ, 2\to 3}$ in quanto è l'unico ramo non reversibile!

$\Delta S_{univ, 2\to 3} = \Delta S_{gas, 2\to 3} + \Delta S_{amb, 2\to 3}$

$\Delta S_{gas, 2\to 3} = n c_v \int_2^3 \frac{dT}{T} + nR \int_2^3 \frac{dV}{V} =$

$= n c_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = \frac{3}{2} nR \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) + nR \ln 2 =$

$= \frac{3}{2} nR \ln\left(\frac{2T_1}{3T_1}\right) + nR\ln 2 = \frac{3}{2} nR \ln\left(\frac{2}{3}\right) + nR \ln 2 =$

$= \frac{3}{2} nR \ln 2 + nR \ln 2 - \frac{3}{2} nR \ln 3 = nR\left(\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3\right) =$

$= nR \ln\left(\frac{2^{5/2}}{3^{3/2}}\right) = nR \ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)$

Ambiente = termostato @ T_3

$\Delta S_{amb, 2\to 3} = \frac{-Q_{23}}{T_3} =$ perché se il gas assorbe/cede calore questo è ceduto/assorbito dall'ambiente quindi il segno meno

$= \frac{\frac{1}{2} nRT_1}{T_3} = \frac{\frac{1}{2} nRT_1}{2T_1} = \frac{nRT_1}{4}$

$\Rightarrow \Delta S_{univ, 2\to 3} = nR\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{nRT_1}{4}$

Si noti che $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} > 1$ quindi $nR\ln\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) > 0$

Essendo entrambi i termini positivi si ha che

$\Delta S_{univ} = \Delta S_{univ, 2\to 3} > 0$ come deve essere!

$\boxed{2}$ $PV = nRT$

2a) $V_i \rightarrow V_f = \varepsilon V_i \quad \varepsilon > 1$

$T_i \rightarrow T_f = \frac{T_i}{2}$

$\Delta S_{univ} \geq 0$ va imposto

$\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \cancelto{0}{\Delta S_{amb}} = \Delta S_{gas}$

$\Delta S_{gas} = nc_v \int \frac{dT}{T} + nR \int \frac{dV}{V} = \frac{5}{2} nR \int \frac{dT}{T} + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) =$

$= \frac{5}{2} nR \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \frac{5}{2} nR \ln\left(\frac{1}{2}\right) + nR \ln \varepsilon =$

$= nR \ln \varepsilon - \frac{5}{2} nR \ln 2$

Siccome $\cancel{nR} \ln \varepsilon - \frac{5}{2} \cancel{nR} \ln 2 \geq 0$ e $nR > 0$

$\Rightarrow \ln \varepsilon - \frac{5}{2} \ln 2 = \ln \varepsilon - \ln 2^{5/2} = \ln \varepsilon - \ln(4\sqrt{2}) \geq 0$

$= \ln\left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} > 1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon > 4\sqrt{2}}$

2b) $U = \alpha \cosh\left(\frac{PV}{P_0 V_0}\right)$ essendo $PV = nRT$

abbiamo $U = \alpha \cosh\left(\frac{nRT}{P_0 V_0}\right) = U(T)$ ovvero U

è solo funzione di T!

$\Delta S_{gas} = \int dS_{gas} = \int \frac{\delta Q_{rev}}{T} = \int \frac{dU}{T} + \int \frac{P dV}{T} = \int U'(T) \frac{\cancelto{0}{dT}}{T} + \int \frac{n R \cancel{T}}{V \cancel{T}} dV =$ 0 per l'esperimento di Joule

$= nR \int \frac{dV}{V} = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = nR \ln \beta$ come al solito

$\Delta S_{amb} = 0$

$\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = nR \ln \beta$

non dipende da c_v quindi non cambia neanche se il gas fosse monoatomico

$\boxed{3}$ $P(V) = \alpha V^3$

$V_i \to V_f = \beta V_i \qquad \beta > 1$

3a) $W = \int dV P(V) = \int_{V_i}^{V_f} dV \alpha V^3 = \frac{\alpha V^4}{4}\Big|_{V_i}^{V_f} =$

$= \frac{\alpha}{4}(V_f^4 - V_i^4) = \frac{\alpha}{4}(\beta^4 V_i^4 - V_i^4) = \frac{\alpha}{4}(\beta^4 - 1)V_i^4$

$\cancel{Q} = \Delta U = n c_v (T_f - T_i)$

$\cancel{T_f = P} \quad T = \frac{PV}{nR} = \frac{\alpha V^4}{nR} \Rightarrow T_f = \frac{\alpha V_f^4}{nR} = \frac{\alpha \beta^4 V_i^4}{nR}$

$T_i = \frac{\alpha V_i^4}{nR}$

$\frac{T_f}{T_i} = \beta^4$

$\Delta U = \frac{5}{2} nR (T_f - T_i) = \frac{5}{2} \cancel{n}\cancel{R} \frac{\alpha}{\cancel{n}\cancel{R}} (\beta^4 - 1) V_i^4 = \frac{5}{2}\alpha(\beta^4 - 1) V_i^4$

$Q = \Delta U + W = \frac{5}{2}\alpha(\beta^4 - 1)V_i^4 + \frac{\alpha}{4}(\beta^4 - 1)V_i^4 =$

$= \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right)\alpha(\beta^4 - 1)V_i^4 = \frac{11}{4}\alpha(\beta^4 - 1)V_i^4$

3b) Essendo reversibile $\Delta S_{amb} = -\Delta S_{gas}$

$\Delta S_{gas} = \int dS_{gas} = \int n c_v \frac{dT}{T} + \int nR \frac{dV}{V} = n c_v \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) =$

$= \frac{5}{2} nR \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln \beta = \frac{5}{2} nR \ln(\beta^4) + nR \ln \beta =$

$= \cancel{4}^{2}\frac{5}{\cancel{2}} nR \ln \beta + nR \ln \beta = 11\, nR \ln \beta \Rightarrow \boxed{\Delta S_{amb} = -11\, nR \ln \beta}$

Non dipende da α e V_i perchè queste si cancellano nei rapporti fra temperature e volumi finali vs iniziali

3e) $U(T) = \lambda T^4$

Vale sempre $\Delta S_{amb} = -\Delta S_{gas}$

$$\Delta S_{gas} = \int dS_{gas} = \int \frac{(\delta Q)_{rev}}{T} = \int \frac{dU}{T} + \int \frac{p\,dV}{T} =$$

$$= \int \frac{4\lambda T^{\cancel{3}\,2}\,dT}{\cancel{T}} + \int \frac{nR\cancel{T}}{V\cancel{T}}\,dV = 4\lambda \int dT\,T^2 + nR\int \frac{dV}{V} =$$

$$= 4\lambda \frac{T^3}{3}\Big|_{T_i}^{T_f} + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \frac{4}{3}\lambda\left(T_f^3 - T_i^3\right) + nR\ln\beta =$$

$$= \frac{4}{3}\lambda\left(\beta^{12}T_i^3 - T_i^3\right) + nR\ln\beta = \frac{4}{3}\lambda\left(\beta^{12}-1\right)T_i^3 + nR\ln\beta =$$

$T_f = \beta^4 T_i$

$$= \frac{4}{3}\lambda\left(\beta^{12}-1\right)\frac{\alpha V_i^4}{nR} + nR\ln\beta$$

$\boxed{4}$ Supponiamo che beviamo 2 l H_2O/giorno e che viviamo 80 anni

~~Somm~~ Totale litri $= 2 \times 365 \times 80 = 58400 \simeq 60000$

~~Res~~ Massa H_2O $1\ \frac{kg}{l} \rightarrow M\ 60000\ kg$

Massa molare H_2O $18\ \frac{g}{mol} = 18 \times 10^{-3}\ \frac{kg}{mol} = 1.8 \times 10^{-2}\ \frac{kg}{mol}$

$\rightarrow$ numero moli $= \dfrac{60000\ kg}{1.8 \times 10^{-2}\ kg/mol} \simeq 3.3 \times 10^6$ mol

Numero molecole $= N_A \times$ numero moli $= 6.023 \times 10^{23}\ mol^{-1} \times 3.3 \times 10^6$ mol $\simeq 2 \times 10^{30}$

Considerando le incertezze (quanta acqua beviamo, quanto viviamo, ecc.) accetterò qualsiasi risposta tra 10^{29} e 10^{31}!