

SOLUZIONI ESAME TERMODINAMICA GIUGNO 2023

1

(1a) Perché γ è già ^{usata} occupata a indicare $\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v}$;

(1b)

$$\begin{array}{l}
 3 \rightarrow 4 \\
 \text{e} \\
 1 \rightarrow 2 \\
 \text{adiabatiche}
 \end{array}
 \Rightarrow P_4 V_4^\gamma = P_3 V_3^\gamma \quad \begin{array}{l} P_1 = P_4 \\ P_2 = P_3 \end{array} \Rightarrow P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^\gamma = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} = \beta \quad \text{CVD!}$$

(1c)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{out}|}{Q_{in}} = 1 - \frac{|Q_{out}|}{Q_{in}} = 1 - \frac{n C_p (T_1 - T_4)}{n C_p (T_3 - T_2)} \quad \begin{array}{l} T_1 < T_4 \\ \swarrow \end{array} = 1 - \frac{n C_p (T_4 - T_1)}{n C_p (T_3 - T_2)} =$$

$$= 1 - \left(\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}\right) = 1 - \left(\frac{T_1 - T_4}{T_2 - T_3}\right) = 1 - \frac{T_1 \left(1 - \frac{T_4}{T_1}\right)}{T_2 \left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \left[\frac{\left(1 - \frac{T_4}{T_1}\right)}{\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right)} \right]$$

ma $\frac{T_4}{T_1} = \frac{P_4 V_4 / nR}{P_1 V_1 / nR} = \frac{P_4 V_4}{P_1 V_1} \stackrel{P_1 = P_4}{=} \frac{P_1 V_4}{P_1 V_1} = \frac{V_4}{V_1} = \delta = \beta$ per il punto (1b)

Allo stesso modo $\frac{T_3}{T_2} = \frac{P_3 V_3 / nR}{P_2 V_2 / nR} = \frac{P_3 V_3}{P_2 V_2} \stackrel{P_2 = P_3}{=} \frac{P_2 V_3}{P_2 V_2} = \frac{V_3}{V_2} = \beta$

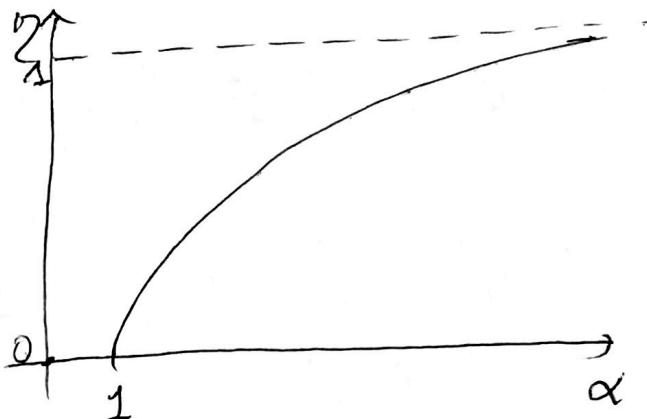
$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \left[\frac{(\beta)}{(\beta)} \right] = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Essendo 1-2 adiabatica $TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const} \Rightarrow T_1 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left[1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right] \quad \text{CVD!}$$

(1d) $\eta = 1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ $\gamma = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{1-5/3}{5/3} = \frac{-2/3}{5/3} = -\frac{2}{5} < 0$

~~$\eta(\alpha) \in \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}) = 1$~~



$\alpha \rightarrow \infty$ vuol dire che $T_2 \rightarrow \infty K$ e/o $T_1 \rightarrow 0 K$ (a T_2 finito e fissato) il che permette di prelevare infinito calore ($T_2 \rightarrow \infty K$) o non scaricare sul serbatoio più freddo ($T_1 \rightarrow 0 K$) violando l'enunciato di Kelvin-Planck e quindi costruendo una macchina termica con rendimento perfetto.

(1e) La temperatura minima è ovviamente $T_{min} = T_1$ e quella massima ovviamente $T_{max} = T_3$

$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{1}{\beta} \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{\alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\beta}$

$T_3/T_2 = \beta$ $T_1/T_2 = \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

$\eta_{Joule} = 1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

Dato che $\alpha, \beta > 1$ per ipotesi, $\eta_{carnot} > \eta_{Joule} \forall \alpha, \beta$

~~come si può aspettare dal teorema di Clausius~~

(1f) $[A] = J^4 = kg^4 \cdot \frac{m^8}{s^8}$

Non importa quanto sia complicata A , è determinata unicamente da funzioni di stato, quindi è essa stessa funzione di stato. Pertanto lungo il ciclo $\Delta A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1} = 0 J^4!$

[2]

$$P(V) = \alpha \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$(2a) \quad [\alpha] = Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{Kg}{m \cdot s^2}$$

Ho inserito V_0 per rendere adimensionale l'argomento del logaritmo

$$(2b) \quad PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR}$$

$$T_i = \frac{P_i V_i}{nR} = \frac{\alpha V_i}{nR} \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \Rightarrow T_f = \frac{P_f V_f}{nR} = \frac{\alpha V_f}{nR} \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right)$$

$$\Delta U = nC_v \Delta T = nC_v (T_f - T_i) = nC_v \frac{\alpha}{nR} \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right] =$$

$$= \frac{\alpha C_v}{R} \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right]$$

$$W = \int dV P(V) = \int dV \alpha \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = \alpha \left[-V + V \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \right] \Big|_{V_i}^{V_f} =$$

$$= -\alpha V_f + \alpha V_i + \alpha V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - \alpha V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) =$$

$$= \alpha (V_i - V_f) + \alpha \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right]$$

Usando il primo principio nella forma $\Delta U = Q - W$

$$Q = \Delta U + W = \frac{C_v \alpha}{R} \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right] + \alpha (V_i - V_f) + \alpha \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right]$$

$$= \alpha \left(\frac{C_v}{R} + 1 \right) \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right] + \alpha (V_i - V_f) =$$

$$= \alpha \frac{C_p}{R} \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right] + \alpha (V_i - V_f)$$

$$\frac{C_v}{R} + 1 = \frac{C_v + R}{R} = \frac{C_p}{R}$$

Usando il primo principio nella forma

$$\delta Q = nC_p dT - VdP$$

$$Q = \int \delta Q = \int dT nC_p - \int dP V(CP) = nC_p \int dT - \int dP V(CP)$$

$$P(V) = \alpha \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \rightarrow V = V_0 \exp\left[\frac{P}{\alpha}\right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q &= nC_p \int dT - \int dP V_0 \exp\left[\frac{P}{\alpha}\right] = nC_p \Delta T - V_0 \int_{P_i}^{P_f} dP \exp\left[\frac{P}{\alpha}\right] = \\ &= nC_p \Delta T - \alpha V_0 \exp\left[\frac{P}{\alpha}\right] \Big|_{P_i}^{P_f} = nC_p (T_f - T_i) - \alpha V_0 \left(e^{\frac{P_f}{\alpha}} - e^{\frac{P_i}{\alpha}}\right) \end{aligned}$$

con $\frac{P_i}{\alpha} = \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \Rightarrow e^{\frac{P_i}{\alpha}} = \frac{V_i}{V_0}$ e $\frac{P_f}{\alpha} = \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) \Rightarrow e^{\frac{P_f}{\alpha}} = \frac{V_f}{V_0}$

$$\Rightarrow Q = nC_p (T_f - T_i) - \alpha V_0 \left(\frac{V_f}{V_0} - \frac{V_i}{V_0}\right) \quad T_{i,f} = \frac{\alpha V_{i,f}}{nR} \ln\left(\frac{V_{i,f}}{V_0}\right)$$

$$= \frac{nC_p}{nR} \alpha \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right] - \alpha (V_f - V_i) =$$

$$= \frac{\alpha C_p}{R} \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right] + \alpha (V_i - V_f)$$

uguale al risultato ottenuto tramite $Q = \Delta U + W$ CVD!

Volendo (ma chi lo vorrebbe???) uno poteva complicarsi la vita nel fare l'integrale

$$\int nC_p dT = nC_p \Delta T \quad \text{nel seguente modo}$$

Essendo $T = \frac{PV}{nR} = \frac{\alpha V}{nR} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \Rightarrow dT = \left[\frac{\alpha}{nR} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \frac{\alpha}{nR} \right] dV$

$$\int dT n_{cp} = n_{cp} \int dT = n_{cp} \int dV \left[\frac{\alpha}{nR} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \frac{\alpha}{nR} \right] = \frac{\alpha n_{cp}}{nR} \int dV \left[\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + 1 \right]$$

$$= \frac{\alpha n_{cp}}{R} \left[-V + V \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + V \right]_{V_i}^{V_f} = \frac{\alpha n_{cp}}{R} V \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \Big|_{V_i}^{V_f}$$

$$= \frac{\alpha n_{cp}}{R} \left[V_f \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) - V_i \ln\left(\frac{V_i}{V_0}\right) \right]$$

che è precisamente $n_{cp} \Delta T$ come già visto prima!

B

(3a) Essendo tutte le trasformazioni reversibili

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = 0 \Rightarrow \Delta S_{amb} = -\Delta S_{gas}$$

Lungo il percorso I uso $dS_{gas} = nC_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$ per 1→2 essendo isocoro.

e $dS_{gas} = nC_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}$ per 2→3 essendo isobara

1→2 isocora, $dV=0$

$$dS_{gas} = nC_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \xrightarrow{dV=0} = nC_v \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{gas} = \int_{T_1}^{T_2} nC_v \frac{dT}{T} = nC_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

2→3 isobara, $dP=0$

$$dS_{gas} = nC_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} \xrightarrow{dP=0} = nC_p \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{gas} = \int_{T_1}^{T_2} nC_p \frac{dT}{T} = nC_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)$$

Quindi $\Delta S_{gas, I} = nC_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nC_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right)$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2 / nR}{P_1 V_1 / nR} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} \stackrel{V_1=V_2}{=} \frac{P_2}{P_1} = \alpha$$

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{P_3 V_3 / nR}{P_2 V_2 / nR} = \frac{P_3 V_3}{P_2 V_2} \stackrel{P_3=P_2}{=} \frac{P_2 V_3}{P_2 V_2} = \frac{V_3}{V_2} = \beta$$

$$\Rightarrow \Delta S_{\text{gas}, I} = nC_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nC_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = nC_v \ln \alpha + nC_p \ln \beta$$

Essendo $\Delta S_{\text{amb}} = -\Delta S_{\text{gas}}$ abbiamo

$$\Delta S_{\text{amb}, I} = -n(C_v \ln \alpha + C_p \ln \beta)$$

(3b) Qui vale lo stesso discorso ovvero

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{amb}} = 0 \Rightarrow \Delta S_{\text{amb}} = -\Delta S_{\text{gas}}$$

essendo il percorso II reversibile

~~Eq~~ Usando $dS_{\text{gas}} = nC_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$

$$\Delta S_{\text{gas}} = \int_{T_1}^{T_3} nC_v \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_3} nR \frac{dV}{V} = nC_v \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)$$

$$\frac{T_3}{T_1} = \underbrace{\frac{T_3}{T_2}}_{\beta} \underbrace{\frac{T_2}{T_1}}_{\alpha} = \alpha\beta \quad \text{e} \quad \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} = \beta$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{gas}} &= nC_v \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) = nC_v \ln(\alpha\beta) + nR \ln \beta = \\ &= nC_v \ln \alpha + nC_v \ln \beta + nR \ln \beta = nC_v \ln \alpha + n \underbrace{(C_v + R)}_{C_p} \ln \beta = \\ &= nC_v \ln \alpha + nC_p \ln \beta \end{aligned}$$

Essendo $\Delta S_{amb} = -\Delta S_{gas}$ abbiamo

$$\Delta S_{amb, II} = -\Delta S_{gas, II} = -n (c_v \ln \alpha + c_p \ln \beta) = \Delta S_{amb, I} \quad \underline{CVD!}$$

(3c) In linea di principio non c'era necessariamente motivo di aspettarsi $\Delta S_{amb, I} = \Delta S_{amb, II}$. Sappiamo però che $\Delta S_{gas, I} = \Delta S_{gas, II}$ essendo l'entropia funzione di stato e sapendo per costruzione che il gas va da 1 a 3 in entrambi i percorsi. Unto al fatto

che le trasformazioni sono reversibili e quindi $\Delta S_{univ} = 0$

$\Rightarrow \Delta S_{amb} = -\Delta S_{gas}$, non ci dovrebbe quindi sorprendere che ΔS_{amb} non cambi!

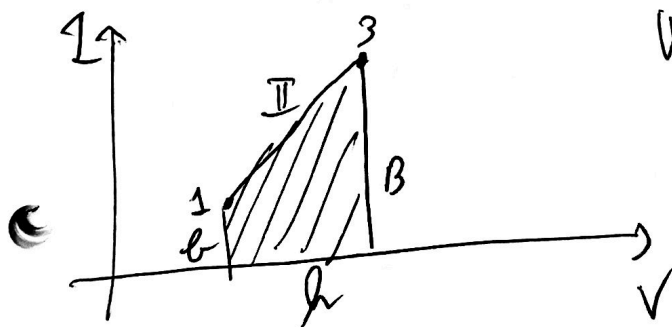
$$\begin{array}{ccc} (3d) & P_1 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} & V_1 = 1 \text{ m}^3 \rightarrow V_2 = 1 \text{ m}^3 \\ & \downarrow \alpha = 3 & \downarrow \beta = 2 \\ & P_2 = P_3 = 3 \times 10^5 \text{ Pa} & V_3 = 2 \text{ m}^3 \end{array}$$

$$W_I = W_{12} + W_{23} \quad \text{ma } W_{12} = 0 \text{ in quanto } \Delta V_{12} = 0$$

$$\text{Quindi } W_I = W_{23} = P_2 (V_3 - V_2) = 3 \times 10^5 \text{ Pa} \times (2 - 1) \text{ m}^3 = 3 \times 10^5 \text{ J}$$

Mentre W_{II} è l'area del trapezio di sotto

$$\begin{aligned} W_{II} &= \frac{(b+B)h}{2} = \frac{(P_3 + P_1)(V_3 - V_1)}{2} \\ &= \frac{(3+1) \times 10^5 \text{ Pa} \times (2-1) \text{ m}^3}{2} = 2 \times 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$



$$W_I \neq W_{II}! \quad \underline{CVD!}$$

Non c'era assolutamente alcun buon motivo per aspettarsi $W_I = W_{II}$, perché il lavoro non è una funzione di stato. Un sistema non "possiede" lavoro, "possiede" la capacità di fare lavoro.

(3e) No. Essendo le trasformazioni reversibili, $\Delta S_{univ} = 0$, e non c'è alcuna energia degradata. Semplicemente come dal punto di sopra non c'era alcun motivo per aspettarsi $W_I = W_{II}$, parte del lavoro non fatto è andato in calore ceduto all'ambiente, ma è stato ceduto reversibilmente e quindi, almeno in linea di principio, è recuperabile e dunque non degradato.

4

(4a) Per l'esperimento di Joule $\Delta T_{if} = 0$

$$dS_{gas} = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = nR \frac{dV}{V} \rightarrow \Delta S_{gas} = \int_{V_i}^{V_f} nR \frac{dV}{V} = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = nR \ln \alpha$$

$\Delta S_{amb} = 0$ in quanto il gas è isolato $\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = nR \ln \alpha$

(4b) $U = \beta T^4 \rightarrow dU = 4\beta T^3 dT$ $[\beta] = \frac{J}{K^4} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot K}$

(5a) $dS_{gas} = \frac{(\delta Q)_{rev}}{T} = \frac{(dU + PdV)}{T} = \frac{4\beta T^3 dT + PdV}{T} = \frac{4\beta T^2 dT + (nRT/V)dV}{T} = 4\beta T^2 dT + nR \frac{dV}{V}$

$$\Rightarrow \Delta S_{gas} = \int_{T_i}^{T_f} 4\beta T^2 dT + \int_{V_i}^{V_f} nR \frac{dV}{V} = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = nR \ln \alpha$$

$\Delta S_{gas} = nR \ln \alpha$ $\Delta S_{amb} = 0$ come prima $\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = nR \ln \alpha$

$\Delta S_{gas} = nR \ln \alpha$ Come prima, fisicamente il motivo è che per quanto complicata sia la nuova U , essa è solo funzione di T quindi il contributo di dU al dS

è irrilevante lungo un'espansione libera adiabatica

in quanto $dT=0$ e $dU \propto dT$

$$(4c) \quad U = nC_v dT \quad PV^\alpha = n\tilde{R}T$$

$$[\tilde{R}] = \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \frac{\text{Kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{mol} \cdot \text{K}}$$

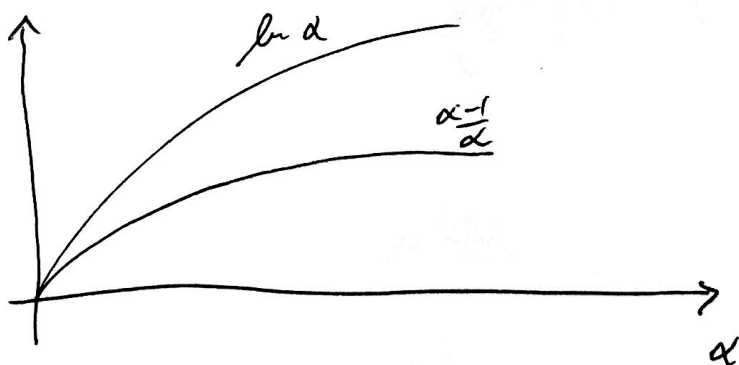
$$dU = nC_v dT$$

$$dS_{\text{gas}} = \frac{(dU + PdV)}{T} \quad P(V) = \frac{n\tilde{R}T}{V^\alpha}$$

$$dS_{\text{gas}} = \frac{(dU + PdV)}{T} = \frac{nC_v dT + n\tilde{R}T/V^\alpha dV}{T} = nC_v \frac{dT}{T} + n\tilde{R} \frac{dV}{V^\alpha}$$

$$\Delta S_{\text{gas}} = \int_{T_i}^{T_f} nC_v \frac{dT}{T} + \int_{V_i}^{V_f} n\tilde{R} \frac{dV}{V^\alpha} = n\tilde{R} \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\alpha} = -\frac{n\tilde{R}}{V^{\alpha-1}} \Big|_{V_i}^{V_f} = n\tilde{R} \left(\frac{1}{V_i^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_f^{\alpha-1}} \right) =$$

$$= \frac{n\tilde{R}}{V_i} \left(1 - \frac{V_i}{V_f} \right) = \frac{n\tilde{R}}{V_i} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{n\tilde{R}}{V_i} \frac{\alpha-1}{\alpha}$$



$$\Delta S_{\text{amb}} = 0$$

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{amb}} = \frac{n\tilde{R}}{V_i} \frac{\alpha-1}{\alpha}$$

In questo caso ΔS_{gas} cambia in quanto cambia il contributo di PdV a dS proprio perché $P(V)$ cambia, o meglio cambia l'equazione di stato con $P(V) \propto \frac{1}{V^\alpha}$ a T fissa