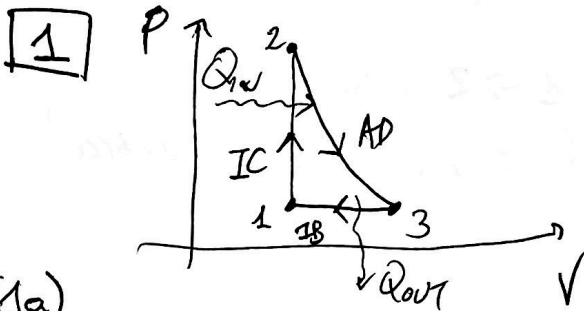


SOLUZIONI ESAME TERMODINAMICA AGOSTO 2023



$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_3} = \alpha > 1$$

(1a)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{out}|}{Q_{in}} = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12}} = 1 - \frac{nc_p(T_2 - T_3)}{nc_v(T_2 - T_1)} \stackrel{T_2 < T_3}{=} 1 - \frac{nc_p(T_3 - T_2)}{nc_v(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{c_p}{c_v} \frac{T_3 - T_2}{T_2 - T_1}$$

$$= 1 - \gamma \frac{\frac{T_3}{\alpha} - 1}{\frac{T_2}{\alpha} - 1} \quad \text{Essendo } \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2 / nk}{P_1 V_1 / nk} \stackrel{V_1 = V_2}{=} \frac{P_2}{P_1} = \alpha$$

Quindi $\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{T_3}{\alpha} - 1\right)}{\alpha - 1}$

Dobbiamo trovare $\frac{T_3}{T_1}$

Essendo $2 \rightarrow 3$ adiabatica $P T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const} \Rightarrow T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$

$$T_2 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 P_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \begin{matrix} T_2 = \alpha T_1 \\ P_3 = P_2 \end{matrix} \Rightarrow \alpha T_1 P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \alpha$$

Quindi $\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right)}{\alpha - 1}$ CVD!

(1b) Carnot $\eta = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} \quad T_{min} = T_3 \quad T_{max} = T_2$

$\Rightarrow \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \frac{1}{\alpha}$

Confrontare i due

$$\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\alpha^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right)}{\alpha - 1} = 1 - \frac{5}{3} \frac{\left(\alpha^{\frac{3}{5}} - 1\right)}{\alpha - 1} \quad \text{vs} \quad \eta_c = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

$$\eta = 1 - \sigma \quad \text{vs} \quad \eta_c = 1 - \tau$$

Se riusciamo a dimostrare che $\sigma > \tau \quad \forall \alpha > 1$ allora il Carnot è sempre più efficiente

Dimostriamo $\frac{\sigma}{\tau} > 1 \quad \forall \alpha > 1$

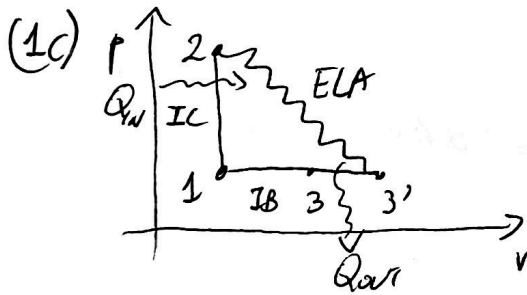
$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{5}{3} \left(\frac{\alpha^{\frac{3}{5}} - 1}{\alpha - 1} \right) / \frac{1}{\alpha} = \frac{5}{3} \frac{\alpha}{\alpha - 1} (\alpha^{\frac{3}{5}} - 1) \quad \text{è una funzione monotona}$$

Basta quindi controllare i limiti $\alpha \rightarrow 1$ e $\alpha \rightarrow \infty$.

Per $\alpha \rightarrow \infty$ banalmente $\frac{\sigma}{\tau} \rightarrow \infty > 1 \quad \checkmark$

Per $\alpha \rightarrow 1$ come dal testo $\frac{\sigma}{\tau} \rightarrow 1 \quad \checkmark$

Quindi il Carnot è sempre più efficiente!



Essendo $2 \rightarrow 3'$ ELA, $T_2 = T_3'$ (esperimento di Joule) e quindi $P_2 V_2 = P_3' V_3' \Rightarrow P_2 V_2 = P_1 V_3' \Rightarrow \frac{V_3'}{V_2} = \frac{P_2}{P_1} = \alpha$

Come prima

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{out}|}{Q_{in}} = 1 - \frac{nc_v(T_3' - T_1)}{nc_v(T_2 - T_1)} \stackrel{T_3' = T_2}{=} 1 - \gamma \frac{\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)}{\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)} = 1 - \gamma$$

$\eta = 1 - \gamma < 0 \quad \left(= -\frac{2}{3} \right)$ quindi il ciclo non può essere considerato una macchina termica

(1d) Essendo P_1 e P_2 , e anche T_1 e T_2 le stesse del caso (1a) per ipotesi, lo stato 2 è lo stesso di prima, e quindi $V_1 = V_2$. Essendo U funzione di stato, ΔU_{12} è la stessa, mentre globalmente $U_{12} = 0$ ($\Delta U_{12} = 0$) quindi $Q_{12} = Q_{in}$ rimane lo stesso del caso (1a). $Q_{out} = Q_{33'}$ rimane invariato quindi $\eta = 1 - \frac{|Q_{out}|}{Q_{in}} = 1 - \gamma \left(\frac{\alpha^{\frac{1}{2}} - 1}{\alpha - 1} \right)$ rimane invariato

(1e) Senza il termostato T_2 non abbiamo nessuna garanzia che lo stato 2 sia lo stesso di prima. lo stato finale sarà indeterminato (con i dati a disposizione)

[2] $\delta W = \alpha V dP$ $\alpha > 0$ $U = nC_V T + \text{const}$ $PV = nRT$

(2a) [α] è adimensionale dato che VdP ha già le dimensioni di un lavoro

(2b) $V_f = \epsilon V_i$ $\epsilon > 1$

$Q = 0$ per definizione (esponente di Joule)

$$dS_{\text{gas}} = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = \frac{dU + \delta W}{T} = \frac{nC_V dT + \delta W}{T} = \frac{\delta W}{T} = \frac{\alpha V dP}{T} = \alpha \frac{nRT}{PT} dP =$$

$$= \alpha nR \frac{dP}{P} \quad \text{misura fatta lungo isotermo reversibile}$$

$P_i \rightarrow P_f = \frac{P_i}{\epsilon}$ essendo $V_f = \epsilon V_i$ $T_f = T_i$

$$\Delta S_{\text{gas}} = \int_{P_i}^{P_f} \alpha nR \frac{dP}{P} = \alpha nR \int_{P_i}^{P_f} \frac{dP}{P} = \alpha nR \ln P \Big|_{P_i}^{P_f} = \alpha nR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) =$$

$$= \alpha nR \ln \left(\frac{1}{\epsilon} \right) = -\alpha nR \ln \epsilon$$

$\Delta S_{\text{amb}} = 0$ per definizione

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{amb}} = \Delta S_{\text{gas}} = -\alpha nR \ln \epsilon$$

(2c) Essendo $\Delta S_{\text{univ}} < 0$ la trasformazione non può essere spontanea. Per una compressione libera si avrebbe

$V_f = \frac{V_i}{\epsilon} < 1$ e $P_f = \epsilon P_i$ quindi $\Delta S_{\text{univ}} = \alpha nR \ln \epsilon > 0$,

che quindi sarebbe spontanea.

(2d) Usiamo la definizione di adiabatica quasi statica

$$\delta Q = 0 \rightarrow dU = \delta Q - \delta W = -\delta W$$

Usiamo $dU = -\delta W$

$$nC_v dT = -\alpha V dP = -\alpha \frac{nRT}{P} dP$$

$$\int c_v dT = -\alpha \frac{nRT}{P} dP \Rightarrow \int \frac{dT}{T} = -\frac{\alpha R}{c_v} \int \frac{dP}{P}$$

$$\ln T = -\frac{\alpha R}{c_v} \ln P + \text{const} \Rightarrow \ln T + \frac{\alpha R}{c_v} \ln P = \text{const}$$

$$\Rightarrow \left| TP^{\frac{\alpha R}{c_v}} = \text{const} \right| \quad \text{CVD!}$$

Essendo $T \propto PV$ $TP^{\frac{\alpha R}{c_v}} = \text{const} \rightarrow PV P^{\frac{\alpha R}{c_v}} = \text{const}$

$$\Rightarrow P^{1+\frac{\alpha R}{c_v}} V = \text{const} \Rightarrow P^{\frac{c_v + \alpha R}{c_v}} V = \text{const} \Rightarrow \left(PV^{\frac{c_v}{c_v + \alpha R}} = \text{const} \right) \quad \text{CVD!}$$

(2e)

~~$U = \text{const}$~~

Consideriamo il primo principio in forma differenziale

$$dU = \delta Q - \delta W = \delta Q - \alpha V dP$$

A pressione costante $dP=0 \Rightarrow dU = \delta Q$. A pressione costante

ci aspettiamo $Q = n c_p \Delta T$ e quindi $\delta Q = n c_p dT$ mentre qui abbiamo $dU = n c_v dT$, per cui sarebbe appropriato cambiare il nome $c_v \rightarrow c_p$

(2f)

$\delta W = \alpha V dP + \alpha P dV = \alpha d(PV) = d(\alpha PV)$ ovvero δW è il differenziale esatto di una funzione di stato (αPV) quindi è esso stesso funzione di stato (FS). I principio: $dU = \delta Q - \underbrace{dW}_{\text{FS}}$

$\Rightarrow \delta Q = dU + dW$ somma di funzioni di stato, quindi Q stesso deve essere funzione di stato.

3

$$V_{stanza} = V_{aria} = 5m \times 5m \times 3m = 75m^3$$

$$P_{aria} = 1.01325 \times 10^5 Pa$$

$$T_{aria} = 30^\circ C = 303.15 K$$

$$n_{aria} = \frac{PV}{RT} \approx 3016.64 \text{ mol}$$

$$\lambda = 333.55 \frac{J}{g} = 333.55 \times 1000 \frac{J}{kg} = 3.3355 \times 10^5 \frac{J}{kg}$$

Prima si deve sciogliere il ghiaccio. Calore richiesto

$$Q_{fusione} = \lambda_{ghiaccio} \text{ dove } m_{ghiaccio} = 10 \times 30g = 10 \times 3 \times 10^{-2} kg = 0.3 kg$$

$$Q_{fusione} = \lambda_{ghiaccio} \approx 100065 J$$

Q_{fusione} viene prelevato dall'aria che quindi si raffredda di

$$\Delta T_{aria} = \frac{Q}{nC_v} = \frac{Q}{\frac{5}{2}nR} = \frac{2Q}{5nR} \approx 1.5967 K$$

stanza indefornabile! Volume costante, pressione no $C_v = \frac{5}{2}R$ (N_2 biatomico)

Quindi quando il ghiaccio si è sciolto $T_{aria} = 303.15 K - 1.5967 K \approx 301.55 K$ ($\approx 28.4^\circ C$ - non male!)

Ora è un semplice esercizio di equilibrio termostatico fra due sistemi

①

Aria

$$n_1, C_v = \frac{5}{2}R, T_1 = 301.55 K$$

C piccolo

↓

C

~~piccolo~~ C piccolo ma per unità di massa (non molare)

$$T_{eq} = \frac{n_1 C_v T_1 + m_2 C_2 T_2}{n_1 C_v + m_2 C_2} \approx 290.18 K = 17.03^\circ C$$

$$\rightarrow \boxed{T_{eq} \approx 17^\circ C}$$

②

Acqua

$$m_2 = 10 kg \text{ (9.7l + 0.3kg dal ghiaccio)}$$

$$C_2 = 4186 \frac{J}{kg \cdot K}$$

$$T_2 = 0^\circ C = 273.15 K$$