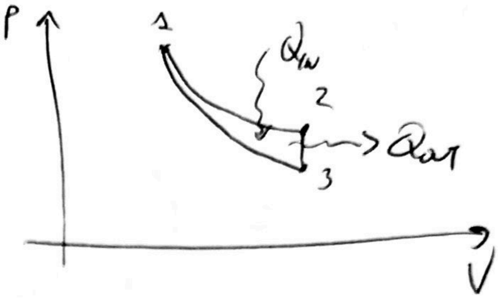
SOLUZIONI ESAME TERMODINAMICA LUGLIO 2023



$\boxed{1}$

(1a)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{out}|}{Q_{IN}} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}} =$$

$$= 1 - \frac{|nc_v(T_3 - T_2)|}{nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \overset{T_3 < T_2}{=} 1 - \frac{\cancel{n}c_v(T_2 - T_3)}{\cancel{n}RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \overset{T_2 = T_1}{=} 1 - \frac{c_v}{R}\frac{T_1 - T_3}{T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} =$$

$$\overset{c_v = \frac{3}{2}R}{=} 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{T_1 - T_3}{T_1}}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}\right) \overset{\frac{V_2}{V_1} = \alpha}{=} 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1 - \frac{T_3}{T_1}}{\ln \alpha}\right)$$

$3 \to 1$ adiabatica: $TV^{\gamma - 1} = \text{const}$ $\quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} \overset{V_2 = V_3}{=} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma-1} = \alpha^{1-\gamma}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} \rightarrow 1 - \gamma = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{T_3}{T_1} = \alpha^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1 - \frac{T_3}{T_1}}{\ln \alpha}\right) = \boxed{1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1 - \alpha^{-\frac{2}{3}}}{\ln \alpha}\right)}$$

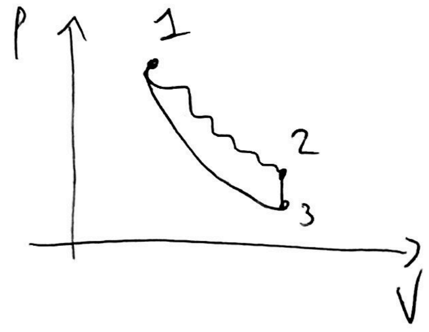
CVD!

(1b) $\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{T_3}{T_1}$

Abbiamo visto che $\frac{T_3}{T_1} = \alpha^{1-\gamma} \rightarrow \eta_{carnot} = 1 - \alpha^{1-\gamma} = 1 - \alpha^{-\frac{2}{3}}$

Si può dimostrare che $\eta_{carnot} > \eta \ \forall \alpha$ (ma non l'ho richiesto!)

(1c)



Ora non c'è più Q_{IN}!

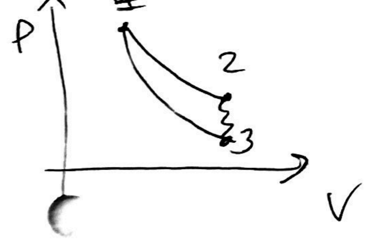
Dato che $1 \to 2$, anche se irreversibile, è pur sempre adiabatica!

Quindi $Q_{IN} = 0$ $\quad |Q_{OUT}| = |Q_{23}| \neq 0$

Formalmente $\eta = 1 - \frac{|Q_{OUT}|}{Q_{IN}} \longrightarrow -\infty$

Quindi essendo $\eta < 0$ questa non può essere considerata una macchina termica. Non produce lavoro, ~~anzi spreca~~ positivo, anzi spreca tutto il lavoro (negativo) che riceve in input. È il ciclo più stupido del mondo se vogliamo!

(1d) Gli stati 2 e 3 sono gli stessi che nel caso (1a)



essendo P_2 e P_3 le stesse per ipotesi, T_2 e T_3 idem, e quindi anche $V_2 = V_3$ essendo $V = \frac{nRT}{P}$.

Essendo U funzione di stato, ΔU_{23} è la stessa di prima. $W_{23} = 0$ essendo $V_2 = V_3$, quindi Q_{23} è lo stesso di prima. $Q_{23} = Q_{OUT}$, mentre Q_{IN} rimane Q_{12} lo stesso di prima. Ricapitolando

$\eta = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}}$ ← identico a prima ← identico a prima

quindi $\eta = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1 - \alpha^{-\frac{2}{3}}}{\ln \alpha}\right)$ come per il punto (1a)

(1e) Senza il termostato non abbiamo nessuna garanzia che lo stato 3 sia quello di prima in (1a). Sappiamo P_3, ma nient'altro, dato che la temperatura finale dipende in modo imprevedibile dalla ripartizione tra energia dissipata per attrito tra interno ed esterno. Quindi lo stato finale della trasformazione $2 \to 3$ è indeterminato, e non possiamo trarre conclusioni su η.

$\boxed{2}$

(2a) $Q_{IN} = 30J$ $|Q_{OUT}| = 20J$

$\rightarrow$ I principio $W = Q_{IN} - |Q_{OUT}| = 10J$

$15J > 10J$ viola il I principio $\rightarrow$ $\boxed{\text{CIARLATANO}}$

(2b) $|Q_{OUT}| = 0J$ viola l'enunciato di Kelvin-Planck del II principio (macchina monoterma) $\rightarrow$ $\boxed{\text{CIARLATANO}}$

(2c) $Q_{IN} = 30J$ $|Q_{OUT}| = 20J$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{OUT}|}{Q_{IN}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$ 50% eccede $\frac{1}{3}$

quindi viola il I ~~II~~ principio $\longrightarrow$ $\boxed{\text{CIARLATANO}}$

(2d) $T_1 = 400\,k$ $T_2 = 200k$

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{200k}{400k} = \frac{1}{2}$$ 75% eccede $\frac{1}{2}$

viola il I o il II principio $\longrightarrow$ $\boxed{\text{CIARLATANO}}$

(2e) $T_1 = 300\,k$ $T_2 = 0\,k$

non si può raggiungere 0k per il II o "III" principio

$\rightarrow$ $\boxed{\text{CIARLATANO}}$

(2f) $Q_1 = 400\,J$ $T_1 = -73.15°C = 200\,k$

$Q_2 = 300\,J$ $T_2 = -173.15°C = 100\,k$

~~Q_3~~ E $T_3 = 50\,k$

$W = 500\,J \Rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 = W \Rightarrow Q_3 = W - Q_1 - Q_2 = -200\,J$

Quindi la macchina scarica $|Q_{out}| = 200\,J$ a T_3

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = \frac{400\,J}{200\,k} + \frac{300\,J}{100\,k} - \frac{200\,J}{50\,k} = (2+3-4)\frac{J}{k} =$$

$$= +1\,\frac{J}{k} > 0\,!$$ Impossibile per il teorema

viola il II principio $\leftarrow$ di Clausius $\left(\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \le 0\right) \rightarrow \boxed{\text{CIARLATANO}}$

(2g) $T_1 = 200\,k$ $T_2 = 100\,k$

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{100\,k}{200\,k} = \frac{1}{2}$$ $\eta = 90\%$ eccede $\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\text{CIARLATANO}}$

Viola il I e/o II principio

(2h) $Q_{IN} = 30\,J$ $T_1 = 300\,k$ $|Q_{out}| = 40\,J$ $T_2 = 100\,k$

Questa macchina non viola il I principio, presumibilmente servono 10 J di lavoro in input. Ma che senso ha? Scarica più calore di quanto preleva, e lo fa nel verso della Natura (quindi non è un frigorifero), in più a spese di lavoro. ~~Che cosa~~ Non è né una macchina termica né un frigorifero $\Rightarrow$ $\boxed{\text{FESSO}}$

(2i) $Q_1 = 300\,J \qquad T_1 = -243.15°C = 30\,K$

$Q_2 = 200\,J \qquad T_2 = 20\,K$

$Q_3 = 100\,J \qquad T_3 = 10\,K$

$|Q_4| = 100\,J \qquad T_4 = -268.15°C = 5\,K$

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = \frac{300\,J}{30\,K} + \frac{200\,J}{20\,K} + \frac{100\,J}{10\,K} - \frac{100\,J}{5\,K} =$$

$= (10+10+10-20)\frac{J}{K} = 10\,\frac{J}{K} > 0 \rightarrow$ impossibile per il teorema di Clausius (viola il II principio) $\rightarrow$ $\boxed{\text{CIARLATANO}}$

(2j) $T_1 = 200\,K \qquad T_2 = 100\,K$

$\eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{1}{2} = \cancel{50\%}\ \frac{1}{2}$ 49% non eccede $\frac{1}{2}$, quindi l'inventore è $\boxed{\text{LEGITTIMO}}$ (anzi è pure abbastanza bravo, quindi va finanziato)

$\boxed{3}$ $U(T) = \alpha T^3 \qquad PV = \beta T^3$

(1a) $[J] = [\alpha][K]^3 \rightarrow [\alpha] = \frac{J}{K^3} = \frac{N \cdot m}{K^3} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot K^3}$

$[J] = [\beta][K]^3 \rightarrow [\beta] = \frac{J}{K^3} = \frac{N \cdot m}{K^3} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot K^3}$

(1b) $T_i, P_i, V_i \longrightarrow T_i, P_f, V_f = \varepsilon V_i$ Isoterma

Primo principio in forma differenziale

$dU = \delta Q - \delta W$

$\Delta U = 0$ essendo $\Delta U = U_f - U_i = \alpha T_f^3 - \alpha T_i^3 = 0$ con $T_i = T_f$

$(\Delta U) \Rightarrow \delta Q = \delta W = P dV$ con $P(V) = \frac{\beta T^3}{V}$

$$\Rightarrow Q = \int_{V_i}^{V_f} dV\, P(V) = \int_{V_i}^{V_f} dV \frac{\beta T_i^3}{V} = \beta T_i^3 \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \beta T_i^3 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \beta T_i^3 \ln \varepsilon$$

(1c)

Isocora $T_i, P_i, V_i \longrightarrow T_f, P_f = \varepsilon P_i, V_i$

$$T = \sqrt[3]{\frac{PV}{\beta}} \qquad T_i = \sqrt[3]{\frac{P_i V_i}{\beta}}$$

$$T_f = \sqrt[3]{\frac{P_f V_f}{\beta}} = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon P_i V_i}{\beta}} = \sqrt[3]{\varepsilon} \sqrt[3]{\frac{P_i V_i}{\beta}} = \sqrt[3]{\varepsilon}\, T_i$$

Essendo isocora $W = \int dV\, P(V) = 0$

$$\Rightarrow \Delta U = Q - W = Q \quad \Rightarrow Q = \Delta U$$

$$\Delta U = U_f - U_i = \alpha T_f^3 - \alpha T_i^3 = \alpha (T_f^3 - T_i^3) = \alpha (\varepsilon T_i^3 - T_i^3) = \alpha T_i^3 (\varepsilon - 1)$$

$$\Rightarrow Q = \alpha T_i^3 (\varepsilon - 1)$$

(1d) Isobara $T_i, P_i, V_i \longrightarrow T_f, P_i, V_f = \varepsilon V_i$

$$T = \sqrt[3]{\frac{PV}{\beta}} \qquad T_i = \sqrt[3]{\frac{P_i V_i}{\beta}} \qquad T_f = \sqrt[3]{\frac{P_f V_f}{\beta}} = \sqrt[3]{\frac{P_i \varepsilon V_i}{\beta}} = \sqrt[3]{\varepsilon} \sqrt[3]{\frac{P_i V_i}{\beta}} = \sqrt[3]{\varepsilon}\, T_i$$

$$W = \int dV\, P(V) = \int_{V_i}^{V_f} dV\, P_i = P_i (V_f - V_i) = P_i (\varepsilon V_i - V_i) = P_i V_i (\varepsilon - 1)$$

$$\Delta U = Q - W \Rightarrow Q = \Delta U + W$$

$$\Delta U = U_f - U_i = \alpha T_f^3 - \alpha T_i^3 = \alpha \varepsilon T_i^3 - \alpha T_i^3 = \alpha T_i^3 (\varepsilon - 1)$$

$$Q = \Delta U + W = \alpha T_i^3 (\varepsilon - 1) + \underbrace{P_i V_i}_{= \beta T_i^3} (\varepsilon - 1) = \alpha T_i^3 (\varepsilon - 1) + \beta T_i^3 (\varepsilon - 1) =$$

$$= T_i^3 (\alpha + \beta)(\varepsilon - 1)$$

(1e) Adiabatica

$$dU = \cancel{\delta Q}^{\,0} - \delta W \Rightarrow dU = -\delta W = -PdV$$

$$dU = d(\alpha T^3) = 3\alpha T^2 dT$$

$$\Rightarrow 3\alpha T^2 dT = -PdV = -\frac{\beta T^3}{V} dV$$

$$3\alpha \cancel{T^2} dT = -\beta \frac{T^{\cancel{3}}}{V} dV \rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{\beta}{3\alpha}\frac{dV}{V}$$

Integro

$$\int \frac{dT}{T} = -\frac{\beta}{3\alpha}\int \frac{dV}{V} \rightarrow \ln T = \ln\left(V^{-\frac{\beta}{3\alpha}}\right) + const$$

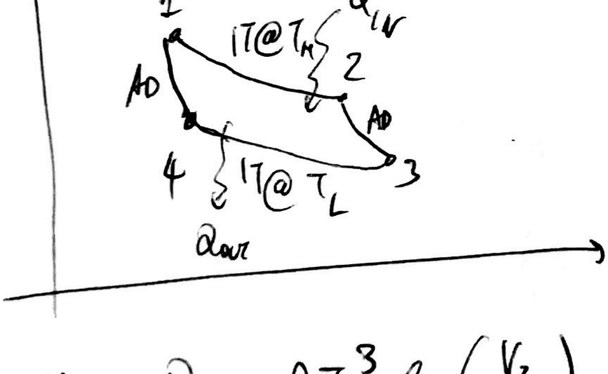
$$\rightarrow T = V^{-\frac{\beta}{3\alpha}} \times const \rightarrow \boxed{TV^{\frac{\beta}{3\alpha}} = const}$$ CVD

Essendo $PV = \beta T^3 \rightarrow T \propto (PV)^{1/3}$

$$TV^{\frac{\beta}{3\alpha}} \propto P^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}} V^{\frac{\beta}{3\alpha}} = P^{\frac{1}{3}} V^{\frac{\alpha+\beta}{3\alpha}} = const$$

$$\Rightarrow \left(P^{\frac{1}{3}} V^{\frac{\alpha+\beta}{3\alpha}}\right)^3 = \boxed{PV^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = const}$$ CVD

(1f) Carnot: 2 adiabatiche + 2 isoterme



$$\eta = 1 - \frac{|Q_{out}|}{Q_{in}} = 1 - \frac{|Q_{34}|}{Q_{12}}$$

Abbiamo visto prima che per le isoterme (1d)

$$Q = \beta T^3 \ln \varepsilon$$

Quindi $Q_{12} = \beta T_H^3 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ e $Q_{34} = \beta T_L^3 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$

Essendo $V_4 < V_3$ $\quad Q_{34} < 0$

$$\rightarrow |Q_{34}| = -Q_{34} = \beta T_L^3 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_{OUT}|}{Q_{IN}} = 1 - \frac{\cancel{\beta} T_L^3 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{\cancel{\beta} T_H^3 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

Essendo $\cancel{1}\, 2 \rightarrow 3$ e $4 \rightarrow 1$ adiabatiche con $TV^\gamma = \text{const}$, $\gamma = \frac{\beta}{3\alpha}$

$$\begin{matrix} T_2 V_2^\gamma = T_3 V_3^\gamma \\ T_1 V_1^\gamma = T_4 V_4^\gamma \end{matrix} \xrightarrow[\substack{T_2 = T_1 = T_H \\ T_3 = T_4 = T_L}]{} \begin{matrix} \cancel{T_H} V_2^\gamma = \cancel{T_L} V_3^\gamma \\ \cancel{T_H} V_1^\gamma = \cancel{T_L} V_4^\gamma \end{matrix} \rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

$$\rightarrow \eta = 1 - \frac{T_L^3}{T_H^3} \frac{\cancel{\ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}}{\cancel{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}} = 1 - \frac{T_L^3}{T_H^3} = \boxed{1 - \left(\frac{T_L}{T_H}\right)^3} \text{ CVD !!}$$

(1g)

$$T_i, P_i, V_i \longrightarrow T_f, P_f, V_f = \varepsilon V_i$$

Essendo espansione libera adiabatica $T_f = T_i$ in quanto per ipotesi valgono i risultati dell'esperimento di Joule

$\Delta S_{amb} = 0$ in quanto non ci sono termostati coinvolti

$$dS_{gas} = \frac{(\delta Q)_{rev}}{T} = \frac{dU + PdV}{T} = \cancel{\frac{3\alpha T^2 dT}{T}} + \frac{PdV}{T} = \frac{\beta T^{\cancel{3}\,2}}{V \cancel{T}} dV = \beta T^2 \frac{dV}{V} \qquad dT = 0$$

$$\Delta S_{gas} = \int dS_{gas} = \int_{V_i}^{V_f} \beta T_i^2 \frac{dV}{V} = \beta T_i^2 \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = \beta T_i^2 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = \beta T_i^2 \ln(\varepsilon)$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = \beta T_i^2 \ln(\varepsilon) + 0 =$$

$$= \beta T_i^2 \ln \varepsilon$$