7 — PF 8.3

Cilindro diatermico, orizzontale

$n = 6\ mol$

$P_i = 6\ bar = 6\times10^5\ Pa$

T_i

↓ isoterma reversibile

$P_f = 2\ bar = 2\times10^5\ Pa$

$Q = 12000\ J$

a) Calcolare T_i, V_i, V_f

Isoterma $\Delta U = 0 = Q - W$

$\Rightarrow Q = W$

$PV = nRT \rightarrow PV = cost$

$$W = \int dV\, P(V) = \int dV \frac{nRT_i}{V} = nRT_i \int \frac{dV}{V} = nRT_i \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = nRT_i \ln\left(\frac{P_i}{P_f}\right)$$

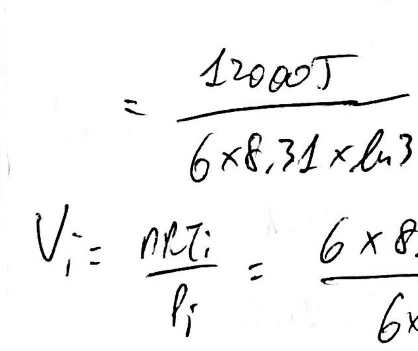
$$Q = W = nRT_i \ln\left(\frac{P_i}{P_f}\right) \longrightarrow T_i = \frac{Q}{nR\ln(P_i/P_f)} = \frac{Q}{nR\ln 3} =$$

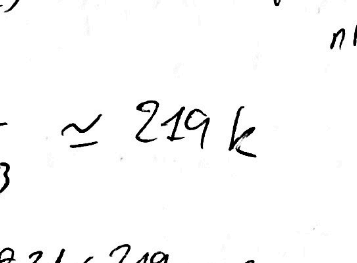
$$= \frac{12000\ J}{6\times 8.31\times \ln 3} \simeq 219\ K$$

$$V_i = \frac{nRT_i}{P_i} = \frac{6\times8.31\times219}{6\times10^5}\ m^3 \simeq 0.018\ m^3$$

$$V_f = \frac{nRT_f}{P_f} = \frac{nRT_i}{P_f} = \frac{6\times8.31\times219}{2\times10^5}\ m^3 \simeq 0.055\ m^3$$

b) Cilindro posto istantaneamente da $P_i = 6\ bar$ a $P_f = 2\ bar$, ambiente termostatato alla temperatura T_i. Calcolare Q, W





trasformazione irreversibile tra gli stessi stati di prima

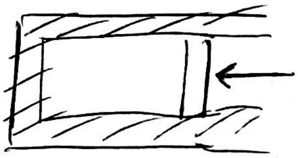
$\Delta U = 0 \quad (T_i = T_f)$

$$W = P_f(V_f - V_i) = 2\times10^5(0.055 - 0.018) \simeq 7400\ J < \text{Q, W reversibili}$$

$$Q = W \simeq 7400\ J$$

8 DF8x

Cilindro con pareti adiabatiche orizzontale



$V_i = 1 m^3$ H_2

$T_i = 300K$

$P_i = 2 \times 10^5 Pa$

a) Espansione reversibile $P_i \to P_f = \frac{P_i}{2}$. Calcolare V_f, T_f

$P_f = \frac{P_i}{2} = 10^5 Pa$

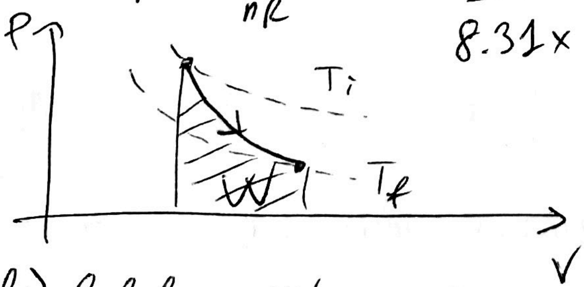
$n = \frac{P_i V_i}{RT} = \frac{2 \times 10^5 \times 1}{8.31 \times 300} mole \simeq 80.2$ mol

Trasformazione adiabatica $\to PV^\gamma = const$ $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} \Rightarrow \gamma = 1.4$

$P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma \longrightarrow V_f = \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_i$ $\cancel{\simeq 1.64 m}$ $\cancel{\left(2\right)^{\frac{5}{7}}}$

$= 2^{5/7} V_i \simeq 1.64 m^3$

$T_f = \frac{P_f V_f}{nR} = \frac{10^5 \times 1.64}{8.31 \times 80.2} \simeq 246 K$ $\to$ giustamente il gas si raffredda



b) Calcolare W

$\Delta U = Q - W \overset{Q=0}{=} -W \implies W = -\Delta U = -nc_v(T_f - T_i) = nc_v(T_i - T_f) > 0$

$c_v = \frac{5}{2}R \Rightarrow$ $W = \frac{5}{2}nR(T_i - T_f) = \frac{5}{2} \times 80.2 \times 8.31 \times (300 - 246) J \simeq 9 \times 10^4 J$

(ovviamente $\Delta U < 0$)

Possiamo anche calcolare W integrando PdV

$$W = \int dV\, P(V) \qquad P_i V_i^\gamma = PV^\gamma \rightarrow P(V) = \frac{P_i V_i^\gamma}{V^\gamma}$$

$$W = \int dV \frac{P_i V_i^\gamma}{V^\gamma} = P_i V_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} dV\, V^{-\gamma} = \frac{P_i V_i^\gamma}{1-\gamma} V^{1-\gamma}\Big|_{V_i}^{V_f} =$$

$$= \frac{P_i V_i^\gamma}{1-\gamma}\left(V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}\right) = -\frac{C_v}{R} P_i V_i^\gamma \left(V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}\right) =$$

$$1-\gamma = 1 - \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v - C_p}{C_v} = -\frac{R}{C_v}$$

$$\frac{1}{1-\gamma} = -\frac{C_v}{R}$$

$$= \frac{C_v}{R} P_i V_i^\gamma \left(V_i^{1-\gamma} - V_f^{1-\gamma}\right) =$$

$$= \frac{C_v}{R}\left[P_i V_i^\gamma V_i^{1-\gamma} - P_i V_i^\gamma V_f^{1-\gamma}\right] = \frac{C_v}{R}\left(P_i V_i - P_i V_i^\gamma V_f^{1-\gamma}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\left(2\times 10^5 \times 1 - 2\times 10^5 \times 1^{\frac{7}{5}} \times 1.64^{-\frac{2}{5}}\right) J \simeq 9\times 10^4\ J \quad \checkmark$$

c) Cilindro posto da $P_i = 2\times 10^5\ Pa$ istantaneamente a $P_f = 10^5\ Pa$ e lasciato raggiungere l'equilibrio termodinamico. Si può calcolare W?

Trasformazione irreversibile

Moto del pistone: accelerazione esterna, poi oscillazioni intorno al punto di equilibrio

$$W = P_{ext}\left(V_2' - V_1\right) \quad \text{ma } V_2' \text{ è indeterminato}$$

Mancano informazioni sulla temperatura finale

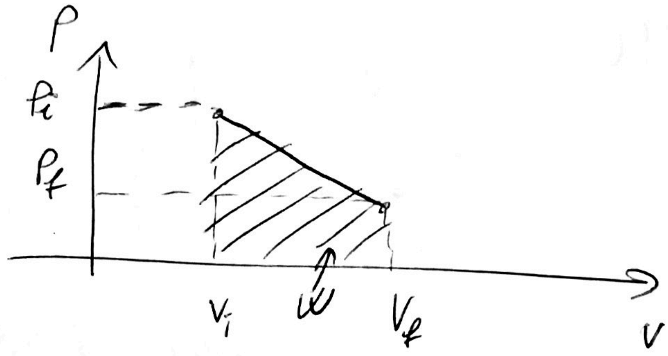
Quindi W non si può calcolare

$\boxed{9}$ $\frac{0.485}{}$ 400 mol di ^4He

- $P_i = 2\times10^5\ Pa \qquad V_i = 6\ m^3$

  $\big\downarrow$ variazione P-V lineare

  $P_f = 10^5\ Pa \qquad V_f = 10\ m^3$



Calcolare Q

$$T_i = \frac{P_iV_i}{nR} = \frac{2\times10^5\times6}{4\times10^2\times8.31} \simeq 361\ K \qquad T_f = \frac{P_fV_f}{nR} = \frac{10^5\times10}{4\times10^2\times8.31} \simeq 301\ K$$

- $Q = \Delta U + W$ dal I principio

$$\Delta U = nc_v\Delta T = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i) = \frac{3}{2}\times400\times8.31\times(301-361)\ J \simeq -2.99\times10^5\ J$$

$$W = \int_{V_i}^{V_f} dV\,P(V)$$

Determiniamo $P(V)$: $P = \alpha V + \beta$ $\qquad \alpha = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{P_f - P_i}{V_f - V_i} = -\frac{10^5\ Pa}{4\ m^3} = -2.5\times10^4\ \frac{Pa}{m^3}$

$$P_i = \alpha V_i + \beta \rightarrow \beta = P_i - \alpha V_i =$$

- $= 2\times10^5\ Pa + 2.5\times10^4\ \frac{Pa}{m^3}\times6\ m^3 =$

  $\cancel{= 5\times10^4\ Pa\ 3.5\times10^5\ Pa} = 3.5\times10^5\ Pa$

Quindi la trasformazione è scrivibile: $\cancel{P(V) = -2.5\times10^4\ \frac{Pa}{m^3}V + 5\times10^4\ Pa}$

$$P(V) = -2.5\times10^4\ \frac{Pa}{m^3}V + 3.5\times10^5\ Pa = \alpha V + \beta \qquad \begin{cases} \alpha = -2.5\times10^4\ \frac{Pa}{m^3} \\ \beta = 3.5\times10^5\ Pa \end{cases}$$

$$W = \int_{V_i}^{V_f} dV\,P(V) = \int_{V_i}^{V_f} dV\,(\alpha V + \beta) = \int_{V_i}^{V_f} dV\,\alpha V + \int_{V_i}^{V_f} dV\,\beta = \alpha\frac{V^2}{2}\Big|_{V_i}^{V_f} + \beta V\Big|_{V_i}^{V_f} =$$

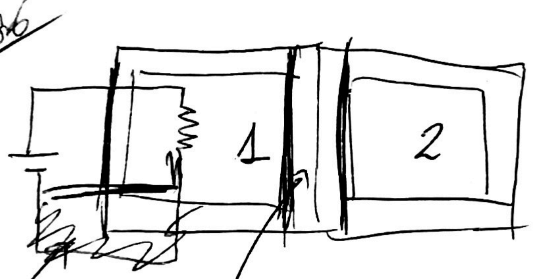
- $= \frac{\alpha}{2}(V_f^2 - V_i^2) + \beta(V_f - V_i) = 6\times10^5\ J$

$Q = \Delta U + W = 3.01\times10^5\ J$

(alternativamente calcoliamo l'area del trapezio)

$$W = \frac{(b+B)h}{2} = \frac{(P_f+P_i)(V_f-V_i)}{2} = 6\times10^5\ J\ !$$

10 DF8b6



Cilindro a pareti adiabatiche

pistone adiabatico scorrevole, no attrito

resistore elettrico

$n_1 = 1$ mol (^4He) $\quad T_1 = 300K \quad V_{tot} = 3l$

$n_2 = 2$ mol (^4He) $\quad T_2 = 300k$

$Q_1 = 1000J$ mediante resistore elettrico in maniera reversibile

Determinare stato finale del gas

Determiniamo prima lo stato iniziale

↳ sistema all'equilibrio quindi c'è anche equilibrio meccanico

$\hookrightarrow P_1 = P_2$

$\cancel{PV = nRT \to V = \frac{nRT}{P}} \quad \cancel{T_1 = T_2} \quad \cancel{V_1 = \frac{nRT}{P_1}} \quad \cancel{V_2 = \frac{nRT}{P_1}} \quad \cancel{\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}}$

$PV = nRT \to V = \frac{nRT}{P}$ $\quad V_1 = \frac{n_1 RT}{P} \quad V_2 = \frac{n_2 RT}{P}$

dato $T_1 = T_2$

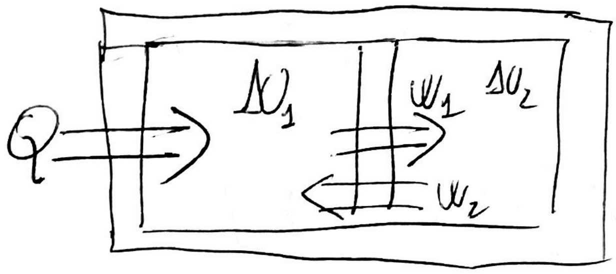
equilibrio meccanico (dato) $P_1 = P_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2} \\ V_1 + V_2 = 3l \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} V_1 = 1l \\ V_2 = 2l \end{array}$$

Quindi

$$\left\{ \begin{array}{lll} n_1 = 1 \text{ mol} & V_1 = 10^{-3} m^3 & T_1 = 300k \\ n_2 = 2 \text{mol} & V_2 = 2\times10^{-3} m^3 & T_2 = 300k \end{array} \right] \quad P = \frac{nRT}{V} \simeq 24.9 \text{ bar} = 24.9 \times 10^5 Pa$$

Come procede la trasformazione?



Zona 1 riceve calore ~~dal~~ resistore dentro, ma zona 2 non ne può ricevere...

Dal III principio di Newton $W_1 = -W_2$

I principio della termodinamica

$$\Delta U = Q - W \Rightarrow Q = \Delta U + W \qquad \begin{cases} \text{Zona 1: } Q = \Delta U_1 + W_1 \\ \text{Zona 2: } 0 = \Delta U_2 + W_2 = \Delta U_2 - W_1 \end{cases}$$

sommando $\quad Q = \Delta U_1 + \Delta U_2$

$$Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 = n_1 c_v (T_1' - T) + n_2 c_v (T_2' - T)$$

dove T_1' e T_2' sono le nuove temperature delle zone una volta che si raggiunga l'equilibrio $(P_1' = P_2' = P')$

$$\begin{cases} P'V_1' = n_1 R T_1' \\ P'V_2' = n_2 R T_2' \\ V_1' + V_2' = V_1 + V_2 = V_{tot} \end{cases}$$

$P'V_2'^{\gamma} = PV_2^{\gamma}$ dato che in zona 2 la trasformazione è adiabatica

5 equazioni 5 incognite $(P', V_1', V_2', T_1', T_2')$

$$P'V_1' = n_1 R T_1'$$
$$P'V_2' = n_2 R T_2'$$

$$P'(V_1' + V_2') = n_1 R T_1' + n_2 R T_2' \Rightarrow \underbrace{P'V_{tot} = R(n_1 T_1' + n_2 T_2')}$$

$(n_1 T_1' + n_2 T_2') = \frac{P'V_{tot}}{R}$

ma sappiamo

$$Q = n_1 c_v (T_1' - T) + n_2 c_v (T_2' - T) = c_v (n_1 T_1' + n_2 T_2') - c_v (n_1 + n_2) T =$$

$$= \frac{C_v}{R} p' V_{tot} - C_v(n_1+n_2)T = \frac{3}{2} p' V_{tot} - C_v(n_1+n_2)T = Q$$

$C_v = \frac{3}{2}R$

noto

$$\Rightarrow p' = \frac{Q + C_v(n_1+n_2)T}{\frac{3}{2}V_{tot}} = \frac{2\left[Q + C_v(n_1+n_2)T\right]}{3V_{tot}} =$$

$$= \frac{2\left[1000 + \frac{3}{2}\times 8.31 \times (1+2)\times 300\right]}{3\times 3\times 10^{-3}} \simeq \cancel{2.71\times 10^6\ Pa} \ \cancel{27.1\ bar = 2.71\times 10^6\ Pa}$$

$$27.1\ bar = 27.1\times 10^5\ Pa$$

Ora usiamo

$$p' V_2'^{\gamma} = p V_2^{\gamma} \qquad \gamma = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow V_2' = \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_2 = \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{3}{5}} V_2 = \left(\frac{24.9\ bar}{27.1\ bar}\right)^{\frac{3}{5}} V_2 \simeq 1.84\ l$$

$$= 1.84\times 10^{-3}\ m^3$$

$$V_1' = V_{tot} - V_2' = 3\times 10^{-3}\ m^3 - 1.84\times 10^{-3}\ m^3 = 1.16\times 10^{-3}\ m^3$$

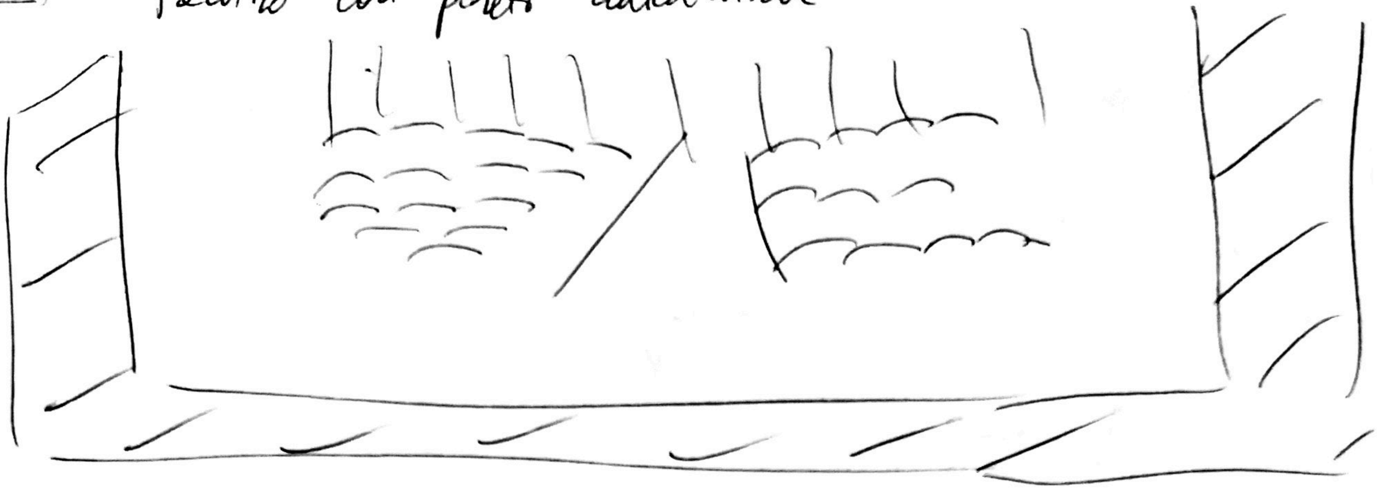
$$PV = nRT \rightarrow T = \frac{PV}{nR}$$

$$\begin{cases} T_1' = \dfrac{P_1' V_1'}{nR} = \dfrac{27.1\times 10^5 \times 1.16\times 10^{-3}}{1\times 8.31} \simeq 378K \\[2em] T_2' = \dfrac{P_2' V_2'}{nR} = \dfrac{27.1\times 10^5 \times 1.84\times 10^{-3}}{2\times 8.31} \simeq 300K \end{cases}$$

Determinato $p', V_1', V_2', T_1', T_2'$

11

Teatro con pareti adiabatiche



1800 persone, ciascuna trasferisce 100 W all'ambiente a riposo

Impianto di condizionamento si ferma

a) Calcolare ΔU dopo 15 minuti

$\Delta U = Q - W$

$W \approx 0$ perché le pareti di un teatro sono (si spera) rigide e indeformabili

$\hookrightarrow \Delta V \approx 0$

$\hookrightarrow \Delta U = Q$

$P = \frac{Q}{\Delta t} \rightarrow Q = P\Delta t = 100 W \times 900 s = 9 \times 10^4$ J per persona

$Q_{tot} = 1800 \times 9 \times 10^4 J = 1.62 \times 10^8 J$

b) Assumendo $P = 1 atm$, $V = (49 \times 35 \times 22) m$, $T_i = 300 K$, calcolare ΔT

(gas ~~monoatomico~~ N_2 Scala

$V = 37730 \, m^3$

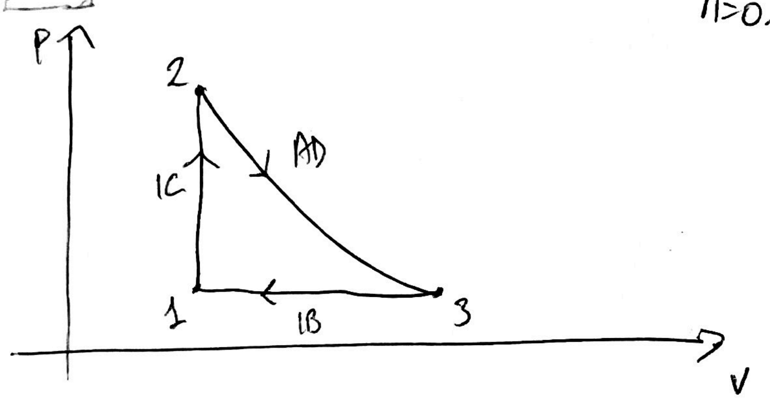
$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \times 3.773 \times 10^4}{8.31 \times 3 \times 10^2} \simeq 1.5 \times 10^6$

$\Delta U = n c_v \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{\Delta U}{n c_v} = \frac{\Delta U}{\frac{5}{2} n R} = \frac{1.62 \times 10^8}{\frac{5}{2} \times 1.5 \times 10^6 \times 8.31} K \simeq 5.2 K$

c) Calcolare ΔU totale (persone + teatro)

$\Delta U = Q - W = 0 - 0 = 0$ U delle persone trasferita all'aria

$\boxed{12}$ DF 8.7



$n = 0.1$ mol gas elio $\downarrow$ monoatomico

$V_1 = 1\,l$ $\quad T_1 = 300K$

$T_2 = 600k$

a) Calcolare rendimento per gas ideale e nell'ipotesi di trasformazioni completamente reversibili

Determiniamo completamente stato 1

$V_1 = 1\,l = 10^{-3}\,m^3 \quad T_1 = 300K \qquad P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{10^{-1} \times 8.31 \times 3 \times 10^2}{10^{-3}}\,Pa \simeq 2.5 \times 10^5\,Pa$

$= 2.5$ bar

- $1 \rightarrow 2$ Isocora

$W_{12} = 0 \qquad Q_{12} = nc_v(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \times 0.1 \times 8.31 \times (600-300)\,J$

$\simeq 374\,J$

$P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} \underset{V_2 = V_1}{=} \frac{nRT_2}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)\frac{nRT_1}{V_1} \underset{P_1 = \frac{nRT_1}{V_1}}{=} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)P_1 \underset{\frac{T_2}{T_1} = 2}{=} 2P_1 \simeq 5$ bar $= 5 \times 10^5\,Pa$

$\Delta U_{12} = Q_{12} - W_{12} = Q_{12} \simeq 374\,J$

$2 \rightarrow 3$ Adiabatica

$Q_{23} = 0$

Per adiabatica $\quad PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const} \quad \rightarrow TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const}$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{1-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = -\cancel{\frac{2}{3}}\,\cancel{\frac{3}{5}} = -\frac{2}{5}$$

$$T_2 P_2^{-\frac{2}{5}} = T_3 P_3^{-\frac{2}{5}}$$

$P_2 = 5\,bar$

$P_3 = 2.5\,bar$

$$\Rightarrow T_3 = T_2\left(\frac{P_2}{P_3}\right)^{-\frac{2}{5}} = T_2\left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} T_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} 600\,K$$

$\frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{2}$

$$\simeq 454.7\,K$$

$$V_3 = \frac{nRT_3}{P_3} = \frac{0.1 \times 8.31 \times 4.547 \times 10^2}{2.5 \times 10^5}\,m^3 \simeq 1.51 \times 10^{-3}\,m^3$$

$$\cancel{W_{23}}\ \Delta U_{23} = Q_{23} - W_{23} = -W_{23} \longrightarrow W_{23} = -\Delta U_{23} = -nc_v(T_3 - T_2) =$$

$$= nc_v(T_2 - T_3) = \cancel{0} \ \frac{3}{2}nR(T_2 - T_3) = \frac{3}{2} \times 0.1 \times 8.31 \times (600 - 454.7)\,J \simeq 181$$

• $3 \to 1$ Isobara

$$Q_{31} = nc_p(T_1 - T_3) = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_3) = \frac{5}{2} \times 0.1 \times 8.31 \times (300 - 454.7)\,J \simeq -321\,J$$

$$\Delta U_{31} = nc_v(T_1 - T_3) = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_3) = \frac{3}{2} \times 0.1 \times 8.31 \times (300 - 454.7)\,J \simeq -193\,J$$

$$\Delta U_{31} = Q_{31} - W_{31} \Longrightarrow W_{31} = Q_{31} - \Delta U_{31} = -321\,J + 193\,J \simeq -128\,J$$

equivalentemente $W_{13} = P(V_1 - V_3) = 2.5 \times 10^5 \times (10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3}) \simeq -125\,J$

Nel suo complesso

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31} = (0 + 181 - 128)\,J \simeq \cancel{5}\ 53\,J$$

$|Q_{IN}| = Q_{12} = 374\,J \qquad |Q_{OUT}| = -Q_{31} = 321\,J$

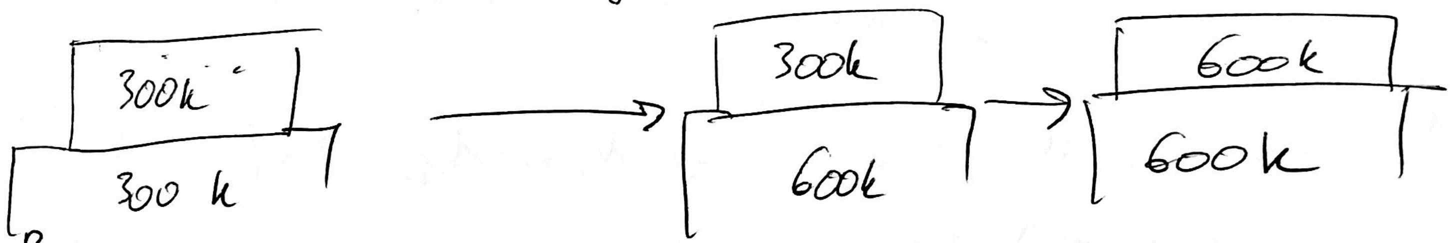
$$\eta = \begin{cases} \dfrac{W}{Q_{IN}} \\[2ex] 1-\dfrac{|Q_{OUT}|}{Q_{IN}} \end{cases} \simeq 0.143 \quad (14\%)$$

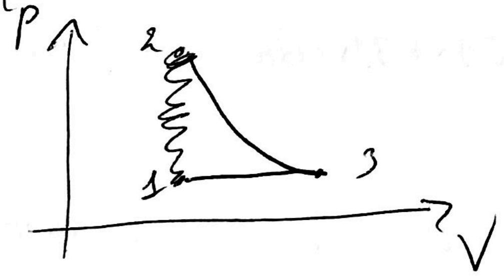
Confrontandolo con un ciclo di Carnot operante fra $T_H=600K$ e $T_L=300K$

$$\eta = 1-\frac{T_L}{T_H} = 1-\frac{300}{600} = 0.5 \quad (50\%)$$

molto più efficiente!

b) Calcolare rendimento supponendo isocora 1→2 irreversibile, ponendo direttamente il gas a contatto con termostato a $T_2=600K$





Stesso stato di equilibrio ~~2~~ (dopo transiente)

$T_2=600K$ $\quad V_2=10^{-3}m^3 \longrightarrow P=\dfrac{nRT_2}{V_2}=5\,bar=5\times10^5\,Pa$

$\Delta U_{12}=nC_V(T_2-T_1)=3745\,J$ come prima

$W_{12}=0$ come prima dato che $\Delta V=0$

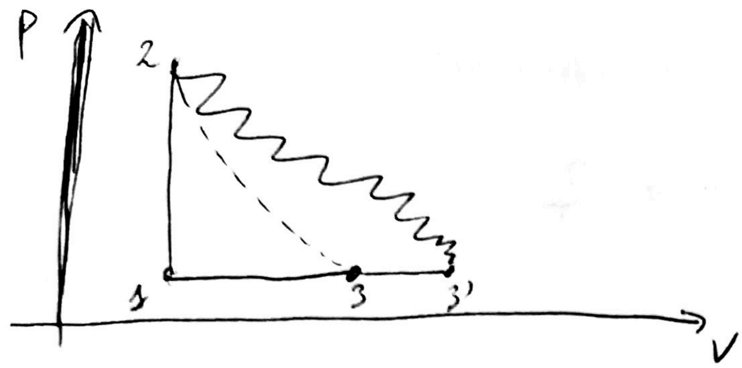
$Q_{12}=Q_{IN}=3745\,J$ come prima

$$\eta = 1-\frac{Q_{IN}}{Q_{OUT}} \simeq 0.143$$ ... come prima! :)

Q_{IN} → come prima anche se 1→2 irreversibile

Q_{OUT} → come prima dato che 3→1 è uguale

c) Calcolare rendimento supponendo adiabatica 2→3 irreversibile (espansione libera adiabatica) con $P_3 = 2.5$ bar come prima.



Per espansione libera adiabatica sappiamo che (esperimento di Joule)

- $\Delta U = 0$, $\Delta T = 0$

Quindi stato 3' ≠ stato 3, il gas raggiunge un nuovo stato di equ...

$T_{3'} = T_2 = 600K$ $(\neq T_3 = 454.7K)$

$$V_{3'} = \frac{nRT_3}{P_{3'}} = \frac{nRT_2}{P_{3'}} = \frac{nRT_2}{P_2}\left(\frac{P_2}{P_{3'}}\right) = \left(\frac{P_2}{P_{3'}}\right)V_2 = 2V_2 = 2\times10^{-3}\,m^3$$

$\frac{P_2}{P_{3'}} = 2$

$P_{3'} = 2.5$ bar $= 2.5\times10^5$ Pa

- Riconsideriamo le trasformazioni

- 1→2 $\quad W_{12} = 0 \quad Q_{12} = 374J$ come prima
  ↳ Q_{IN}
- 2→3' $\quad W_{23'} = 0 \quad Q_{23'} = 0$
- 3'→1 $\quad W_{3'1} = P_1(V_1 - V_{3'}) = 2.5\times10^5(10^{-3} - 2\times10^{-3}) = -250J$

$Q_{3'1} = nc_p(T_1 - T_{3'}) = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_{3'}) = \frac{5}{2}\times0.1\times8.31\times(300-600) = -623...$
↳ Q_{OUT}

- $\eta = \frac{W}{Q_{IN}} = \frac{W_{3'1}}{Q_{12}} \simeq -0.668$

non è una macchina termica!