MECCANICA DEI FLUIDI

Solidi → hanno forma propria

Liquidi, gas → assumono forma del recipiente che li contiene

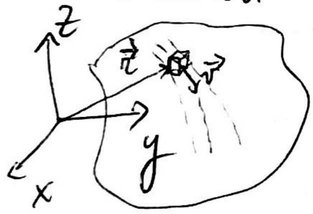
$\underbrace{\text{Liquidi, gas}}_{\text{Fluidi}}$

Liquidi	vs	Gas
↳ Volume definito		Occupano tutto il volume a disposizione
Superficie limite		Nessuna superficie limite
Densità alta ($\sim 10^3 \frac{kg}{m^3}$)		Densità bassa ($\sim 10^0 \frac{kg}{m^3}$)
Incomprimibili elasticamente		Facilmente comprimibili

Differenze dovute alle diverse forze di legame ma possiamo trattare fluidi in modo unificato

Approssimazione del continuo

Infiniti volumetti con volume dV e massa $dm = \rho dV$



$dm = \rho dV$ $\rho(\vec{r}, t)$ densità di massa locale

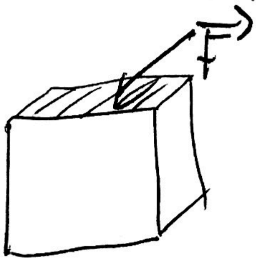
$\vec{v}(\vec{r}, t)$ velocità locale associata al fluido del volumetto

ρ : campo scalare

$\vec{v}$: campo vettoriale, curve a cui $\vec{v}$ è tangente sono le linee di flusso

Possibilità di scorrimento di una qualsiasi parte di fluido rispetto a pareti e parti adiacenti, opposta da attrito interno che però non può opporsi completamente allo scorrimento (no situazione di attrito statico)

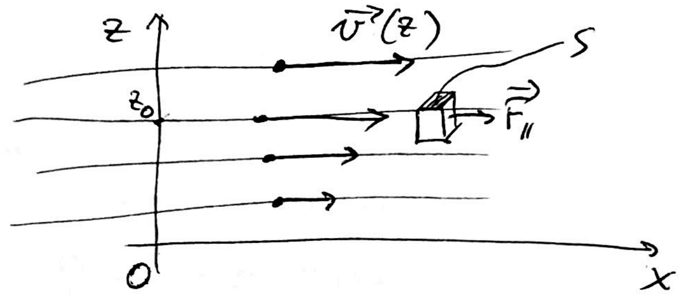
↳ Se un fluido è in quiete, le forze fra gli elementi di fluido devono essere normali alle superfici di separazione (altrimenti non può mantenersi quieto)



$P = \frac{F_\perp}{S}$ pressione che agisce sulla superficie di area S

$\frac{F_\parallel}{S}$ → sforzo di taglio

Solidi si oppongono a sforzi di taglio tramite deformazioni, fluido non può opporsi in condizioni statiche quindi sforzi di taglio inducono movimento e sono possibili solo se il fluido ha parti in movimento a velocità diverse



$$F_{\parallel} = S\eta \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z_0}$$

η → coefficiente di viscosità
misura coesione tra particelle

$\eta = 0 \rightarrow$ fluido perfetto

Forze
- di volume $dF \propto dV$ ad es. peso $dF_g = g\,dm = g\rho\,dV$
- di superficie $dF \propto dS$ ~~ad~~ es. $dF = p\,dS$

In un fluido la pressione non ha caratteristiche direzionali, non dipende dall'orientazione della superficie sulla quale è misurata*

$$p = \frac{dF}{dS}$$

dF → forza agente su superficie infinitesima che circonda un punto

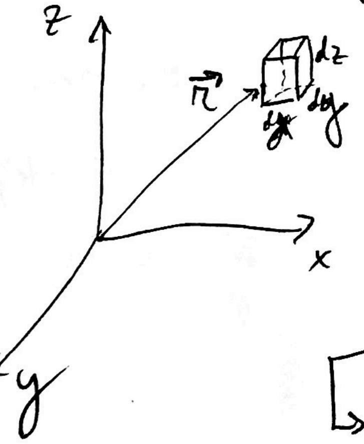
$\boxed{\text{* altrimenti un fluido in quiete si muoverebbe!}}$

→ isotropia delle velocità molecolari

Si può misurare con barometro aneroide
→ scatola deformabile

Equilibrio statico di un fluido

Fluido in quiete: tutti gli elementi hanno velocità nulla in un sistema di riferimento inerziale



$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

→ somma delle forze

interne $\qquad \vec{F}_{ext}$

$$\sum_i (\vec{F}_i)_{superficie} + \boxed{\sum_i (\vec{F}_i)_{esterne}} = 0$$

→ in condizioni di equilibrio queste sono le forze dovute alle pressioni esercitate dal resto del fluido sulla superficie del volumetto!

Per componenti cartesiane:

$$\begin{cases} P(x,y,z)dydz - P(x+dx,y,z)\,dy\,dz + F_{x,ext} = 0 \\ P(x,y,z)dxdz - P(x,y+dy,z)\,dxdz + F_{y,ext} = 0 \\ P(x,y,z)\,dxdy - P(x,y,z+dz)\,dxdy + F_{z,ext} = 0 \end{cases}$$

ma $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)dx = dP_x = P(x+dx,y,z) - P(x,y,z)$ e idem per dP_y e dP_z quindi

$$\begin{cases} \left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz = -F_{x,ext} \\ \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz = -F_{y,ext} \\ \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = -F_{z,ext} \end{cases} \quad dxdydz = dV \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)dV = F_{x,ext} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)dV = F_{y,ext} \\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)dV = F_{z,ext} \end{cases}$$

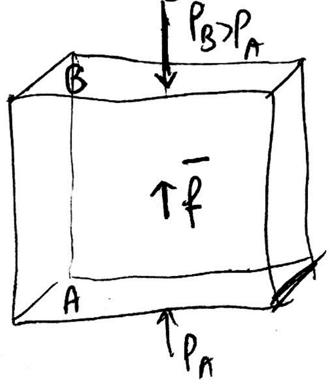
Definiamo operatore gradiente

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} P\, dV = \vec{F}_{ext}} \Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla} P = \rho \vec{f}_{ext}}$$

f_{ext} = forza esterna per unità di massa (accelerazione)

Se in un fluido in quiete agisce una forza di volume la pressione non può essere costante, ma deve aumentare lungo il verso positivo della direzione della forza così che la risultante delle forze di pressione è opposta alle forze di volume



Esempio: fluido in quiete nel campo della forza peso

$$\vec{F}_{ext} = -\hat{z}\, dm\, g = -\hat{z}\rho g dV \qquad (dm = \rho dV)$$

Quindi $F_{x,ext} = 0 \quad F_{y,ext} = 0 \quad F_{z,ext} = -\rho g$

$$\vec{\nabla} P \, dV = \vec{F}_{ext} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz} = -\rho g \end{cases}$$

P non dipende da x, y. Superfici isobare sono piani orizzontali coincidono con le superfici equipotenziali

Quindi $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ — a) fluido incompressibile (ρ=const) — b) gas ideale

a) Fluido incompressibile

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Longrightarrow \int_{z_A}^{z_B} \frac{dP}{dz} dz = -\rho g \int_{z_A}^{z_B} dz \Rightarrow P_B - P_A = -\rho g (z_B - z_A)$$

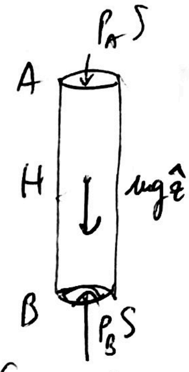
Pressione cresce linearmente con la profondità

Se B è sotto A $H = z_A - z_B > 0$ e $\boxed{\Delta P = P_B - P_A = \rho g H}$ Legge di Stevino

ΔP: pressione idrostatica

Esempio: cilindretto verticale

Forze di pressione sulle superfici laterali si compensano



$mg = \rho S H g$

$\rightarrow \Delta P = \rho g H$

H_2O: $\rho = 10^3 \frac{kg}{m^3}$ $\rho g \simeq 10^4 \frac{Pa}{m}$ $\rightarrow \Delta P \simeq \left(10^4 \frac{Pa}{m}\right) H$

Se $H \simeq 10m$ $\Delta P \simeq 10^5 Pa = 1 atm$ (infatti in mare ogni 10m $\rightarrow$ 1 atm)

b) Gas ideale

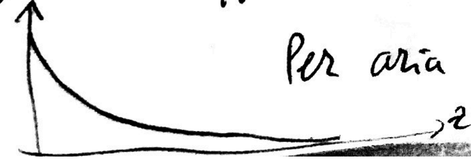
$PV = nRT \longrightarrow$ con T=const questo equivale a $\frac{P}{\rho}$ = const

Mare a $z=0$ (con $P = P_0$ e $\rho = \rho_0$) $\Longrightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0} \Rightarrow \rho(z) = \frac{\rho_0}{P_0} P(z)$

Ma sappiamo che $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ dall'equazione per la statica

$$\Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{\rho_0}{P_0} g P = \lambda P \, , \; \lambda \equiv \frac{\rho_0 g}{P_0} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\lambda P \Rightarrow \boxed{P(z) = P_0 e^{-\lambda z}}$$

$\hookrightarrow$ principio di funzionamento dell'altimetro



Per aria $\begin{cases} z = 1\ km \rightarrow P/P_0 = 0.89 \\ z = 10\ km \rightarrow P/P_0 = 0.26 \\ z = 20\ km \rightarrow P/P_0 = 0.07 \end{cases}$

Equilibrio in un campo di forze conservativo qualsiasi

E_p energia potenziale di un volumetto dV soggetti a forze conservative

U energia per unità di massa $\quad E_p = dm\, U = \rho\, dV\, U$

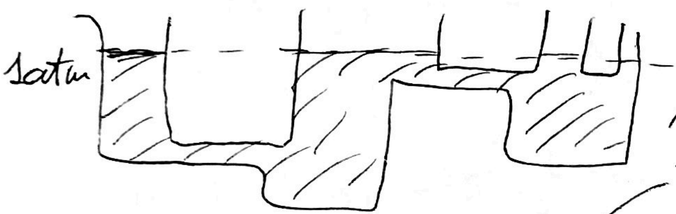
$$dP = \rho\, dU$$

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{\nabla} E_p = -dV\, \vec{\nabla}(\rho U)$$

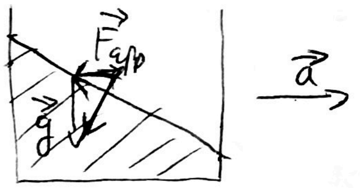
Quindi $\vec{\nabla} P\, dV = \vec{F}_{ext}$ diventa $\vec{\nabla} P\, dV = -dV \vec{\nabla}(\rho U) \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} P = -\rho \vec{\nabla} U}$

Se F = forza peso $U = gz$ ritroviamo i risultati precedenti (legge di Stevino)

Più in generale si vede che le superfici isobare $[\vec{\nabla} P = \vec{0}]$ coincidono con le superfici equipotenziali $(\vec{\nabla} U = \vec{0})$. Spiega ad es.

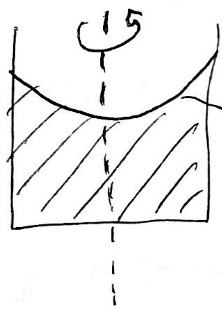


Principio dei vasi comunicanti: liquido nei vari recipienti in comunicazione tra loro e tutti aperti nello stesso ambiente assume lo stesso livello rispetto al suolo



Forza apparente di traslazione + gravità

se non ci fosse equilibrio il liquido scorre finché l'equilibrio non sia raggiunto e a quel punto i livelli sono uguali



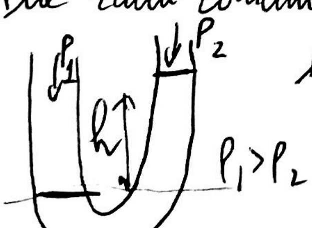
$\rightarrow$ menisco parabolico

forza centrifuga + gravità

Manometro a U

$$P_1 = P_2 + \rho g h \rightarrow h = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$$

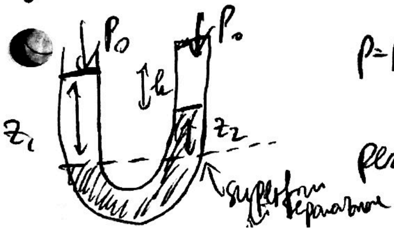
Due rami comunicano con ambienti a pressioni diverse $\rightarrow$ dislivello fra superfici libere



$$h = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$$

minore ρ ~~maggiori~~ più piccole le differenze di P che si misurano

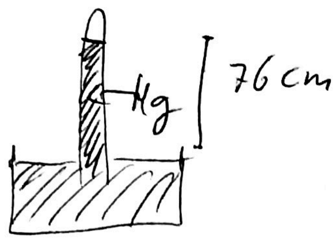
Lo stesso accade se le superfici libere sono a contatto con lo stesso ambiente ma ci sono due liquidi diversi non miscibili



$$p = P_0 + \rho_1 g z_1 = P_0 + \rho_2 g z_2 \Rightarrow \rho_1 g z_1 = \rho_2 g z_2 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{z_2}{z_1} = 1 - \frac{h}{z_1}$$

perché $z_2 = z_1 - h$

Barometro di Torricelli



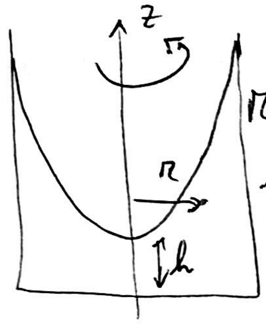
$h = 0.760 m$

$\rho = 13.595 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$

$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

$\hookrightarrow P = 1.01325 \times 10^5 Pa$ (Con H_2O $h = 10.3 m$ perchè ρ molto più bassa)

Liquido in rotazione



Forza radiale $dF = \rho dV \omega^2 r$ $dm = \rho dV$

Mettiamoci in sistema non inerziale rotante con il liquido in quanto statico

forza centrifuga apparente

Forze: $dm\vec{g} + dm\,\omega^2 r \hat{u}_r$

energia potenziale per unità di massa

$dm\,\omega^2 r \hat{u}_r = dm\,\omega^2 (x\hat{u}_x + y\hat{u}_y)$ $E_p = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = gz - \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)$

Superficie libera del liquido equipotenziale quindi

$gz - \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = const$ @ $x=0, y=0 \Rightarrow z = h \Rightarrow const = gh$

$gz - \frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = gh \longrightarrow z = h + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = h + \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2)$ paraboloide di rotazione

Per determinare h: volume liquido in quiete (V_0) = volume liquido in movimento (V_1)

$V_0 = \pi R^2 d$ $V_1 = \int dV_1 = \int 2\pi r\,dr\,z(r) = \int_0^R 2\pi r\left(h + \frac{\omega^2}{2g} r^2\right) dr = \pi R^2\left(h + \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) = \pi R^2 d \Rightarrow \boxed{h = d - \frac{\omega^2 R^2}{4g}}$

intercapedine cilindrica

tachimetro per velocità angolare

Principio di Archimede

Fluido in quiete nel campo di gravità immerso parzialmente o totalmente riceve una spinta verso l'alto pari in modulo al peso del liquido spostato, con punto di applicazione il baricentro del fluido spostato (= centro di massa solo per corpi omogenei e completamente immersi)

$\vec{F}_s + \vec{F}_v = \vec{F}_s + m\vec{g} = 0$

$\Rightarrow \vec{F}_s = -m\vec{g}$ rimane uguale

Se sostituisco V_0 con oggetto di massa $m' = \rho' V_0$ risultante $\neq \vec{0}$! (F_s è la stessa)

$\vec{F}_{tot} = \cancel{(m'g)}\,\vec{F}'_v + \vec{F}_s = (m' - m)\vec{g} = (\rho' - \rho) V_0 \vec{g}$

$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_A$ con $\vec{F}_A = -\rho V_0 \vec{g}$

$\rho' > \rho$ $\vec{F}_{tot} \propto \vec{g}$ corpo affonda

$\rho' < \rho$ $\vec{F}_{tot} \propto -\vec{g}$ corpo galleggia