

Verifichiamo che il primo principio sia soddisfatto

$W = P\Delta V$ $Q = n c_p \Delta T$ $\Delta U = n c_v \Delta T$ ←

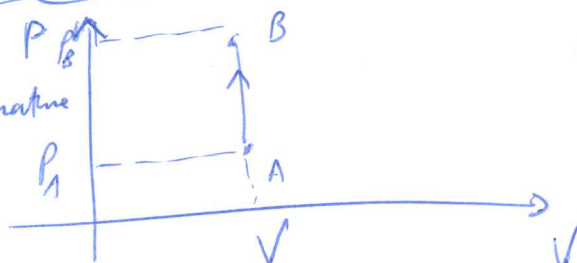
$$Q - W = n c_p \Delta T - P\Delta V = n c_p \Delta T - P V_B + P V_A = n c_p (T_B - T_A) - n R T_B + n R T_A =$$

$$= n c_p (T_B - T_A) - n R (T_B - T_A) = n (c_p - R) (T_B - T_A) = n c_v (T_B - T_A) = n c_v \Delta T = \Delta U$$

$c_p = c_v + R$

Trasformazione isocora quasistatica

$\Delta V = 0 \Rightarrow$ contatto con termistato con temperatura regolabile

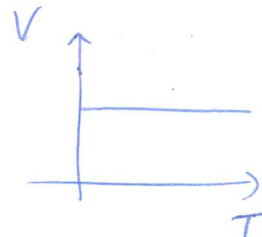
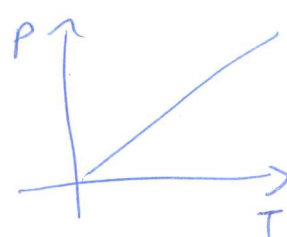


$PV = nRT \rightarrow T = \frac{PV}{nR}$

$W = P\Delta V = 0$ $Q = n c_v (T_B - T_A) = n c_v \left(\frac{P_B V}{nR} - \frac{P_A V}{nR} \right) =$

$= \frac{nV}{nR} c_v (P_B - P_A) = \frac{V}{R} c_v \Delta P$

$Q = \Delta U = n c_v \Delta T$



Trasformazione adiabatica quasistatica

$Q = 0$ $\Delta U = Q - W = -W = n c_v \Delta T$

Usiamo $\left. \begin{aligned} \delta Q = n c_v dT + P dV = 0 \\ \delta Q = n c_p dT - V dP = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow n c_v dT + P dV = n c_p dT - V dP = 0$

$\begin{cases} n c_v dT = -P dV \\ n c_p dT = V dP \end{cases} \rightarrow \frac{V dP}{n c_p dT} = - \frac{P dV}{n c_v dT} \Rightarrow \frac{dP}{P} = - \frac{c_p}{c_v} \frac{dV}{V}$

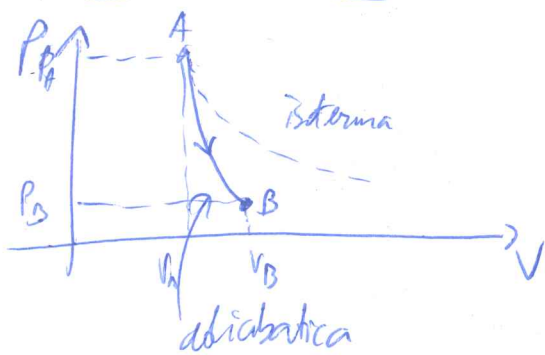
$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} > 1$ $\int \frac{dP}{P} = -\gamma \int \frac{dV}{V}$ $\ln P = -\gamma \ln V + \text{const} \rightarrow \ln P = -\ln V^\gamma + \text{const}$

$\Rightarrow \ln P V^\gamma = \text{const}$

$\gamma = \begin{cases} \frac{5}{3} & \text{gas monoatomico} \\ \frac{7}{5} & \text{gas biatomico} \end{cases}$

$$PV^\gamma = \text{const}$$

più ripida di iperbole
dato che $\gamma > 1$



A parità di volume finale, per adiabatica gas a pressione più bassa e quindi a temperatura più bassa

$$W = -n c_v \Delta T \stackrel{?}{=} \int dVP \quad PV^\gamma = \text{const} \rightarrow P = \text{const} V^{-\gamma} = \alpha V^{-\gamma}$$

Verifichiamo

$$W = \int_{V_A}^{V_B} dV P(V) = \int_{V_A}^{V_B} dV \alpha V^{-\gamma} = \frac{\alpha}{1-\gamma} (V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma})$$

$$Ma \quad P_B V_B^\gamma = P_A V_A^\gamma = \alpha \Rightarrow \alpha V_B^{1-\gamma} = P_B V_B \\ \alpha V_A^{1-\gamma} = P_A V_A$$

$$* = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{1-\gamma} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} \Rightarrow 1-\gamma = -\frac{R}{c_v} \end{matrix}$$

$$W = -\frac{c_v}{R} (P_B V_B - P_A V_A) = -\frac{c_v n R}{R} (T_B - T_A) = -n c_v \Delta T$$

Esprimiamo $PV^\gamma = \text{const}$ in termini di T, V

$$\text{const} = PV^\gamma = \frac{nRT}{V} V^\gamma = nRT V^{\gamma-1} = \text{const} \rightarrow \boxed{TV^{\gamma-1} = \text{const}}$$

$$\text{const} = PV^\gamma = P \left(\frac{nRT}{P} \right)^\gamma = P^{1-\gamma} n^\gamma R^\gamma T^\gamma = \text{const} \rightarrow \boxed{P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}} \\ \Rightarrow \boxed{PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}}$$

Riepilogo trasformazioni termodinamiche

(9)

Trasformazione	ΔU	Q	W
Isoterma $\Delta T=0$ (1 termostato)	$n c_v \Delta T = 0$	$nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) =$ $= nRT \ln\left(\frac{P_i}{P_f}\right)$	$nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) =$ $= nRT \ln\left(\frac{P_i}{P_f}\right)$
Isobara $\Delta P=0$ (∞ termostati)	$n c_p \Delta T = \frac{P \Delta V}{R}$ $n c_v \Delta T = \frac{P c_v \Delta V}{R}$	$n c_p \Delta T = \frac{P c_p \Delta V}{R} =$ $= \left(1 + \frac{c_v}{R}\right) P \Delta V$	$P \Delta V = n R \Delta T$
Isocora $\Delta V=0$ (∞ termostati)	$n c_v \Delta T = \frac{V c_v \Delta P}{R}$	$n c_v \Delta T = \frac{V c_v \Delta P}{R}$	0
Adiabatica $Q=0$ (0 termostati)	$n c_v \Delta T = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} =$ $= \frac{c_v}{R} (P_f V_f - P_i V_i)$	0	$-n c_v \Delta T = \frac{P_i V_i - P_f V_f}{1 - \gamma} =$ $= \frac{c_v}{R} (P_i V_i - P_f V_f)$
Espansione libera adiabatica (non quosistata) (0 termostati)	0	0	0

Alcune relazioni utili per scrivere la tabella

• Isoterma $Q = W$ da $\Delta U = Q - W$

• Isobara $c_p = c_v + R$

• Isocora $W = P \Delta V = 0$

• Adiabatica $P V^\gamma = \text{const}$ $T V^{\gamma-1} = \text{const}$ $P T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{const}$ $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \gamma - 1 = \frac{R}{c_v}$

• Espansione libera adiabatica $\Delta T = 0$

$dU = n c_v dT = \delta Q - P dV$

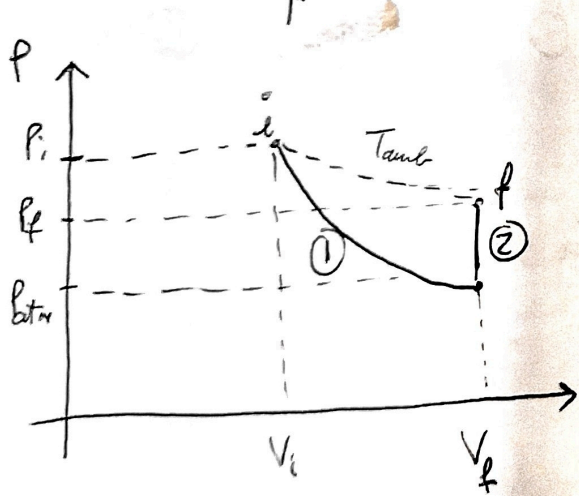
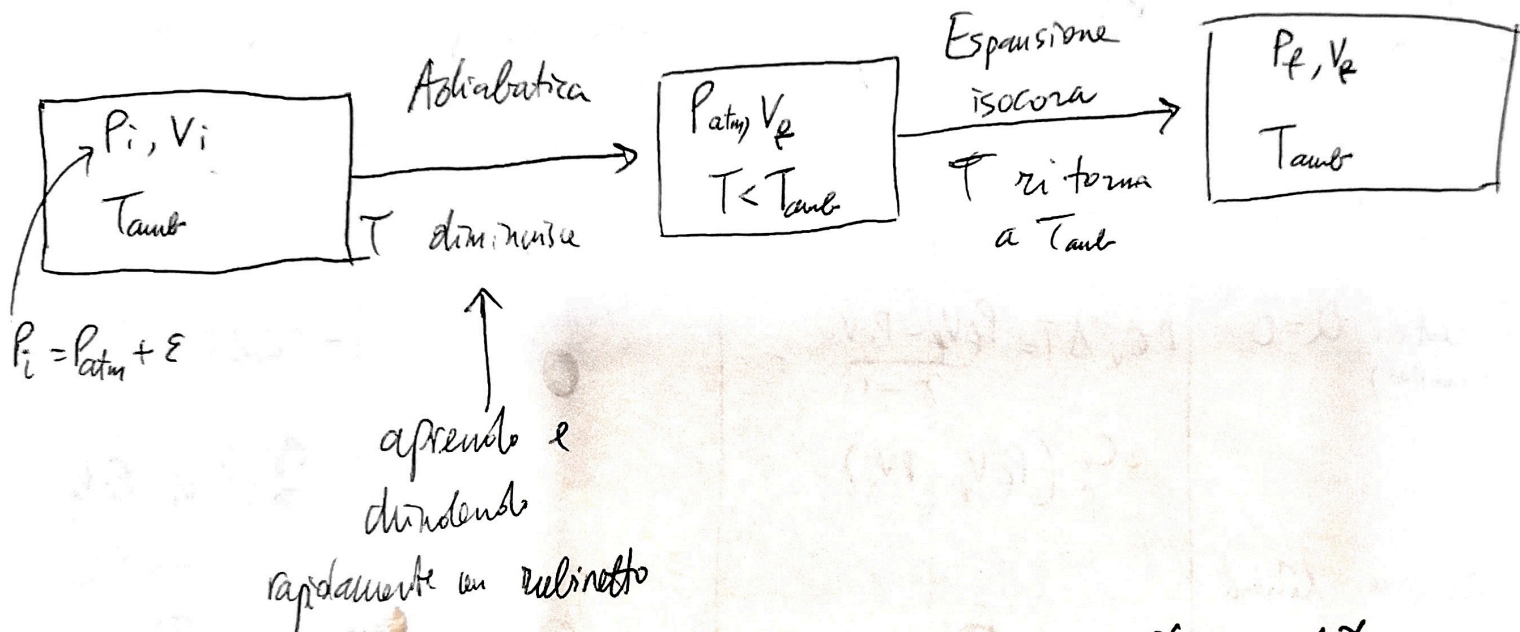
$\delta Q = \begin{cases} n c_v dT + P dV \\ n c_p dT - V dP \end{cases}$

Determinazione dell'indice adiabatico γ

(10)

Metodo di Clément-Desormes (1819)

Piccola massa costante di gas inizialmente a temperatura ambiente e pressione leggermente superiore a quella atmosferica



① adiabatica $\rightarrow P_i V_i^\gamma = P_{atm} V_f^\gamma$

~~② isocora~~
 ② $T_i = T_f = T_{amb} \rightarrow P_i V_i = P_f V_f$

$$\frac{P_i}{P_{atm}} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^\gamma = \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^\gamma$$

$$\ln\left(\frac{P_i}{P_{atm}}\right) = \ln\left[\left(\frac{P_i}{P_f}\right)^\gamma\right] = \gamma \ln\left(\frac{P_i}{P_f}\right) \Rightarrow \gamma = \frac{\ln(P_i/P_{atm})}{\ln(P_i/P_f)}$$

P_{atm} nota
 P_i, P_f misurabili

In pratica P si misura con manometri / barometri $\Rightarrow P \sim \rho g h$

$$\begin{cases} P_{atm} = \rho g h_{atm} \\ P_i = \rho g (h_{atm} + h_i) \\ P_f = \rho g (h_{atm} + h_f) \end{cases} \quad \begin{matrix} h_i, h_f \ll h_{atm} \\ \text{76 mm Hg} \end{matrix} \quad \begin{cases} P_i = \rho g h_{atm} \left(1 + \frac{h_i}{h_{atm}}\right) \\ P_f = \rho g h_{atm} \left(1 + \frac{h_f}{h_{atm}}\right) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{\ln(P_i/P_{atm})}{\ln(P_i/P_f)} = \frac{\ln(1 + \frac{h_i}{h_{atm}})}{\ln(1 + \frac{h_f}{h_{atm}})} \quad (4)$$

$$\frac{\ln(P_i/P_f)}{\ln(1 + \frac{h_i}{h_{atm}}) - \ln(1 + \frac{h_f}{h_{atm}})}$$

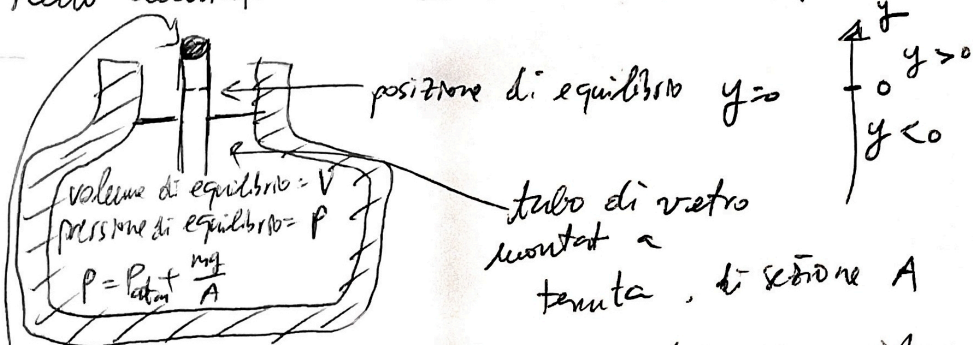
ma $\ln(1+x) \rightarrow x$ per $x \ll 1 \Rightarrow$

h_i, h_f facilmente misurabili.

$$\gamma \approx \frac{\frac{h_i}{h_{atm}}}{\frac{h_i}{h_{atm}} - \frac{h_f}{h_{atm}}} = \frac{h_i}{h_i - h_f}$$

Metodo di Rüchardt (1929) \rightarrow applicato a CO_2 , buon accordo con Calorimetria!

Meno accurato di Clement e Desormes, fa uso di concetti di meccanica classica



sferetta di metallo adattata bene al tubo come pistone

Trascurando attriti, all'equilibrio

$$P = P_{atm} + \frac{mg}{A}$$

gas leggermente compresso dalla sferetta nella sua posizione di equilibrio

Spostando la pallina verso il basso e lasciandola libera oscillerà con un periodo τ , ed eventualmente si fermerà per attrito

$$dV = yA \quad (\text{con piccolo spostamento positivo, } y > 0)$$

$$\hookrightarrow \text{porta a } dP < 0 \quad dP = \frac{F}{A} \quad \text{in quant } F = A dP < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} y > 0 \\ dP, F < 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{forza di richiamo}$$

Oscillazioni rapide, variazioni di P, V adiabatiche in buona approssimazione (quasi statica)

$$PV^\gamma = \text{const} \rightarrow d(PV^\gamma) = \gamma P V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dP = 0$$

$$\text{ma } dV = yA, \quad dP = \frac{F}{A} \Rightarrow \gamma P V^{\gamma-1} dV + V^\gamma dP = \gamma P V^{\gamma-1} yA + V^\gamma \frac{F}{A} = 0$$

$$\Rightarrow F = - \frac{\gamma P V^{\gamma-1} y A^2}{V^\gamma} = - \frac{\gamma P A^2}{V} y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \Rightarrow \left[\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\gamma P A^2}{m V} y = 0 \right]$$

moto armonico semplice $\Rightarrow \tau = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma P A^2}}$

$$\Rightarrow \left[\gamma = \frac{4\pi^2 m V}{P A^2 \tau^2} \right] \quad \text{ma } m, V, P, A \text{ note, } \tau \text{ facilmente misurabile}$$