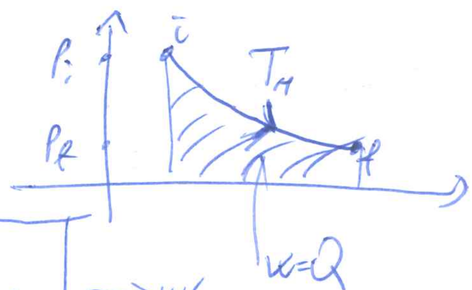
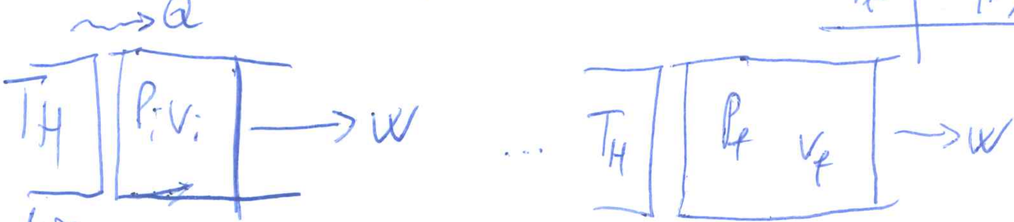
Macchine termiche

Ciclo termodinamico è un esempio di macchina termica, ovvero un dispositivo che può produrre lavoro meccanico grazie alle interazioni con apparati meccanici, assorbendo calore da ~~serbat~~ serbatoi "caldi" e cedendone a serbatoi "freddi" in modo da poter periodicamente ritornare al punto di partenza.

- Prototipo "inutile" di macchina termica

  espansione isoterma quasistatica





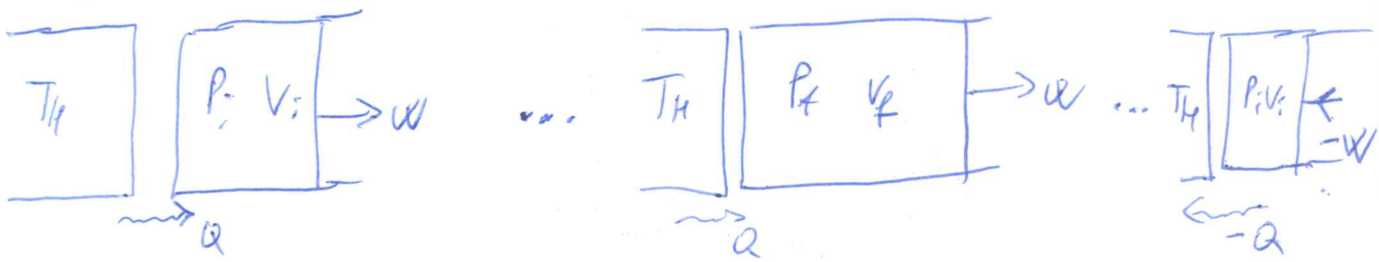
serbatoio "caldo"

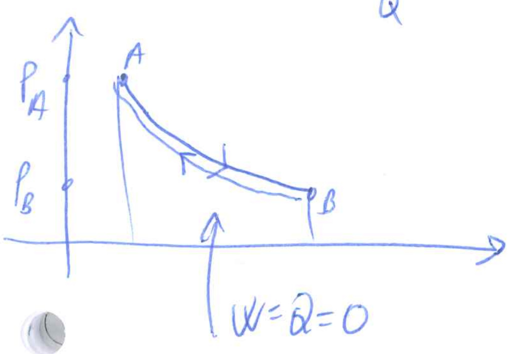
preleva calore da H ... e lo trasforma integralmente in lavoro

... ma deve continuare a espandersi! → ingombra

- Altro prototipo "inutile" e ciclico

  come sopra, più il processo inverso





$\Delta U = 0$, $Q = W = 0$

inevitabile fintanto che si lavora a una sola temperatura

$$W = nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT_H \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = 0 \qquad Q = W = 0$$

Affinchè una macchina termica ciclica sia "utile" deve produrre lavoro (area in diagramma P-V, percorso in senso orario, $\neq 0$), a spese di una quantità di energia termica netta $Q=W$ (dato che $\Delta U=0$ in quanto trasformazione è ciclica). ~~Separia~~

Separiamo $Q = Q_{IN} + Q_{OUT} = Q_{IN} - |Q_{OUT}|$

Q_{IN}: ≥ 0, assorbito

Q_{OUT}: <0, ceduto

Primo principio della termodinamica

$$0 = \Delta U = Q - W = Q_{IN} - |Q_{OUT}| - W \Rightarrow \boxed{W = Q_{IN} - |Q_{OUT}|}$$

non tutta l'energia termica assorbita è convertita in lavoro/energia meccanica

Q_{OUT} ceduto all'ambiente e non utilizzabile per produrre lavoro

Serve più di una sorgente termica

"preleva" Q_{IN}, "scarica" Q_{OUT}, e produce lavoro

$W = Q_{IN} - |Q_{OUT}|$

Rendimento: quantifica l'"efficienza" del sistema

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_{IN}} = \frac{Q_{IN} - |Q_{OUT}|}{Q_{IN}} = 1 - \frac{|Q_{OUT}|}{Q_{IN}}}$$

Per definizione vogliamo $W \geq 0 \rightarrow Q_{IN} \geq |Q_{OUT}|$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq \eta \leq 1}$$

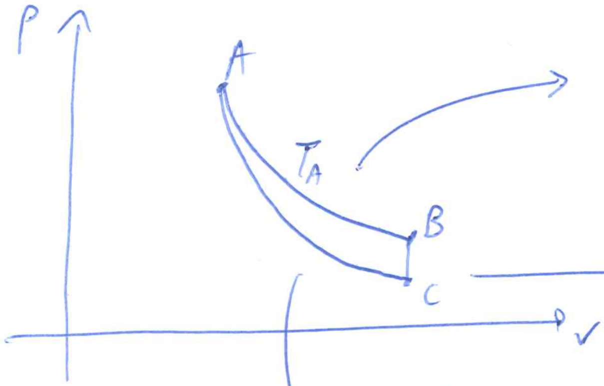
$\eta = 0$: macchina inutile

$\eta = 1$: rendimento massimo, ma richiede $|Q_{OUT}| = 0$ o $Q_{IN} = \infty$

impossibile da raggiungere in casi reali

In pratica $\eta \ll 1$ (la termodinamica si sviluppò nell'800 anche per cercare di quantificare η per la rivoluzione industriale)

• Esempio visto precedentemente: IT-IC-AD



$$\begin{cases} \Delta U_{AB} = 0 \\ Q_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0 \quad \underline{\text{assorbito!}} \\ W_{AB} = Q_{AB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_A) \\ Q_{BC} = nc_v(T_C - T_A) \\ W_{BC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta U_{CA} = nc_v(T_A - T_C) \\ Q_{CA} = 0 \\ W_{CA} = nc_v(T_C - T_A) \end{cases}$$

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{IN}} = \frac{nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) - nc_v(T_A - T_C)}{nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{c_v(T_A - T_C)}{RT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

$Q_{IN} = Q_{AB}$

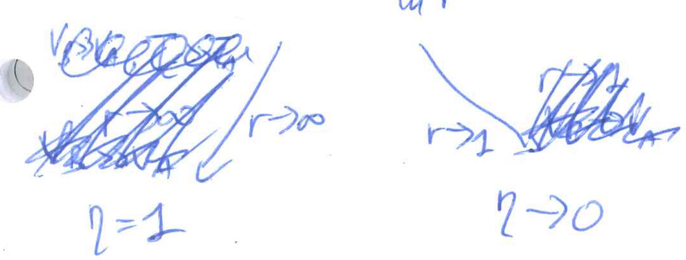
Definiamo $r = \frac{V_B}{V_A} > 1$

Durante adiabatica $TV^{\gamma - 1} = \text{const}$ $\quad \left[\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1\right]$

$$\Rightarrow \frac{T_A - T_C}{T_A} = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 1 - \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^{\gamma - 1} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma - 1} = 1 - r^{1-\gamma}$$

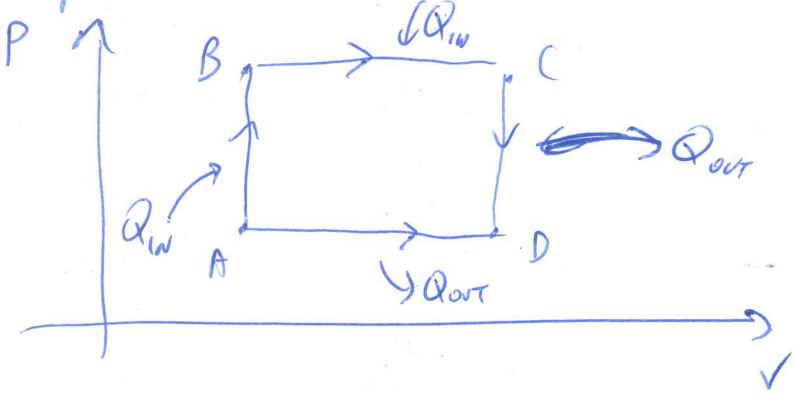
$$\rightarrow \eta = 1 - \frac{c_v}{R} \frac{1 - r^{1-\gamma}}{\ln r}, \quad r > 1, \gamma > 1$$

$r \to \infty$: $V_B \gg V_A$, $V_C \gg V_A$, $T_C \to 0$



$r \to 1$: $V_B \to V_A$, $V_C \to V_A$, $T_C \to T_A$

• Esempio visto precedentemente: IC-IB-IC-IB



$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{P_C}{P_D} = \alpha > 1 \qquad \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A} = \beta > 1$$

$$Q_{AB} = nc_v T_A(\alpha-1) > 0 \qquad Q_{BC} = nc_p T_A \alpha(\beta-1) > 0 \quad \Longrightarrow Q_{IN}$$

$$Q_{CD} = -nc_v T_A \beta(\alpha-1) < 0 \qquad Q_{DA} = -nc_p T_A (\beta-1) < 0 \quad \Longrightarrow Q_{OUT}$$

$$Q_{IN} = Q_{AB} + Q_{BC} = nT_A\left[(\alpha-1)c_v + \alpha(\beta-1)c_v\right] > 0$$

$$Q_{OUT} = Q_{CD} + Q_{DA} = -nT_A\left[\beta(\alpha-1)c_v + (\beta-1)c_p\right] < 0$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{OUT}|}{Q_{IN}} = 1 - \frac{\beta(\alpha-1)c_v + (\beta-1)c_p}{(\alpha-1)c_v + \alpha(\beta-1)c_p} = 1 - \frac{\beta(\alpha-1) + \gamma(\beta-1)}{(\alpha-1) + \gamma\alpha(\beta-1)}$$

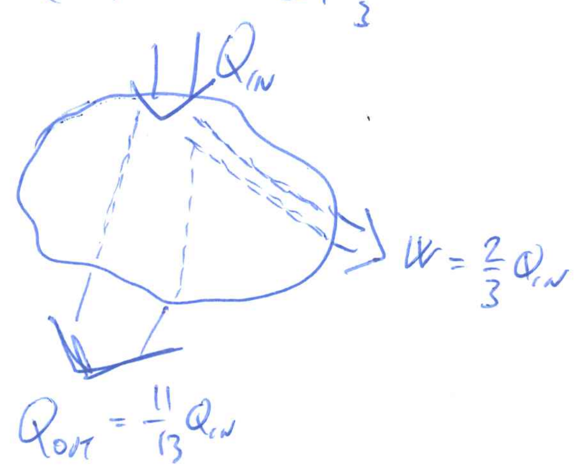
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Mettiamo numeri concreti

$\alpha = \beta = 2$, gas monoatomico $\rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$

$$\rightarrow \eta = 1 - \frac{2 \times 1 + \frac{5}{3} \times (2-1)}{2-1 + \frac{5}{3} \times 2 \times (2-1)} = 1 - \frac{2 + \frac{5}{3}}{1 + \frac{10}{3}} = 1 - \frac{\frac{11}{3}}{\frac{13}{3}} = 1 - \frac{11}{13} = \frac{2}{13}$$

$$\eta = \frac{2}{13} \simeq 15.4\%$$



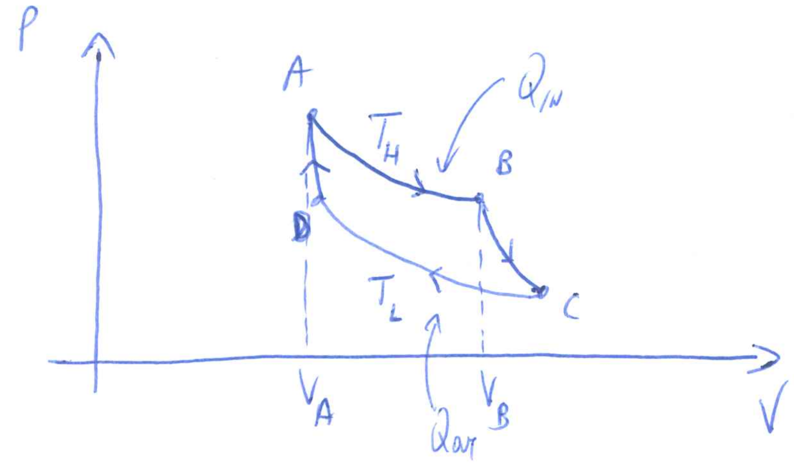
η fissato da:

- "forma" del ciclo
- tipo di gas ideale (mono- o poli-atomico)
- rapporti di compressione

} ma sempre ≤ 1 (in realtà $\ll 1$)

Ciclo di Carnot

IT $\longrightarrow$ AD $\longrightarrow$ IT $\longrightarrow$ AD



Isoterma $A \to B$

$\Delta U_{AB} = 0 \qquad W_{AB} = nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_H \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right) > 0$

$Q_{AB} = W_{AB} = nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0 \longrightarrow Q_{IN}$ assorbito

Adiabatica $B \to C$

$Q_{BC} = 0 \qquad W_{BC} = -\Delta U_{BC} = nC_v(T_H - T_L) > 0$

Isoterma $C \to D$

$\Delta U_{CD} = 0 \qquad W_{CD} = nRT_L \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = nRT_L \ln\left(\frac{P_C}{P_D}\right) < 0$

$Q_{CD} = W_{CD} = nRT_L \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) < 0 \longrightarrow Q_{OUT}$ ceduto

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{OUT}|}{Q_{IN}} = 1 - \frac{nRT_L \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = 1 - \frac{T_L}{T_H}\,\frac{\ln(V_C/V_D)}{\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} = \boxed{1 - \frac{T_L}{T_H}}$$

Siccome BC e DA adiabatici,

$$\begin{cases} T_H V_B^{\gamma-1} = T_L V_C^{\gamma-1} \\ T_H V_A^{\gamma-1} = T_L V_D^{\gamma-1} \end{cases} \longrightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$